INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXIX. BAND DRITTES HEFT 1960

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 14. Juni 1960

Postverlagsort Berlin

Preis DM 13,40

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Darmstadt, Technische Hochschule, Institut für angewandte Mechanik
Professor Dr. **K. Magnus**, Stuttgart O, Hackländerstraße 33
Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersbergstr. 12
Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Nachdruck: Mit der Annahme des Manuskripts eines Beitrages für das „Ingenieur-Archiv" erwirbt der Springer-Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder, einschließlich des Rechts der photomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung. — Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen nicht vorher an anderer Stelle veröffentlicht worden sein und auch später nicht anderweitig, weder im Inland noch im Ausland, veröffentlicht werden. Ausnahmen von dieser Regel bedürfen einer entsprechenden Vereinbarung zwischen Autor, Herausgeber und Verlag.

Photokopien: Auf Grund des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens ist jedoch die Anfertigung photomechanischer Kopien eines Beitrages gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch gestattet, sofern der Hersteller oder Benutzer jede Seite dieser Kopie mit einer Gebühren-Wertmarke im Betrag von DM 0,30 kenntlich macht. Diese Marken sind zu beziehen vom Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. (Inkasso-Stelle) Frankfurt/M., Großer Hirschgraben 17/19. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.* Die Verpflichtung zur Verwendung von Gebühren-Wertmarken entfällt, falls der Hersteller von Kopien mit dem Springer-Verlag ein Pauschalabkommen über die Kopie-Gebühren-Entrichtung vereinbart hat.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 27901

Berlin-Wilmersdorf
Heidelberger Platz 3 / Fernsprecher Sammel-Nr. 830301

Inhalt:

Seite

Grammel, R., Drehzahlabhängige Selbsterregung des unsymmetrischen Kreisels. Mit 6 Abbildungen 153

Isay, W. H., Zur Theorie der Unterwassertragflügel bei wellenförmiger Anströmung. Mit 1 Abbildung 160

Stephan, K., Beitrag zur Berechnung des Wärmeüberganges und Druckabfalles laminarer Einlaufströmungen. Mit 3 Abbildungen 176

Kraus, L., Integralgleichungen gerader Kippträger mit dünnwandigen, offenen und quasi-wölbfreien Profilen. Mit 13 Abbildungen 187

Peeken, H., Über den Einfluß der Unterteilung von Schmierflächen auf die Tragfähigkeit von Schmierfilmen. Mit 14 Abbildungen 199

Conway, H. D., Analysis of Plane Stress in Cartesian Coordinates and with Varying Thickness. Mit 5 Abbildungen 219

Nitsiotas, G., Die Singularitäten der frei drehbar gelagerten orthotropen Halbplattenstreifen. Mit 5 Abbildungen 223

INGENIEUR-ARCHIV

XXIX. BAND DRITTES HEFT 1960

Drehzahlabhängige Selbsterregung des unsymmetrischen Kreisels

Von **R. Grammel**

Kurt von Sanden zum fünfundsiebenzigsten Geburtstag gewidmet

1. Einleitung. Ein (unsymmetrischer) Kreisel, also ein beliebig gestalteter Körper, der sich um seinen Schwerpunkt beliebig und (in unserem Falle) unabhängig von einer etwaigen Bewegung des Schwerpunktes drehen kann, heißt selbsterregt, wenn seine Drehung durch ein inneres Moment erzeugt oder geändert wird, d. h. durch ein Moment, dessen Vektor im Körper fest ist oder in ihm in vorgeschriebener Weise wandert. Ein solches Moment kann als Reaktion von ausgeschleuderten Massen entstehen, deren Betrag je Zeiteinheit hier vernachlässigbar klein sein soll gegenüber der Gesamtmasse, damit wir die zeitliche Massenänderung des Kreisels außer Betracht lassen können, wogegen die Ausschleudergeschwindigkeit hinreichend groß sein muß, um ein merkliches Reaktionsmoment zu erzeugen. Es soll hier nur angedeutet werden, daß ein inneres Moment auch durch einen eingebauten Motor hervorgerufen werden kann, der einen kleinen und (wie das heute möglich ist) freischwebenden, dynamisch kugelsymmetrischen Rotor im Inneren des Körpers antreibt.

Für den Fall, daß das Moment einer solchen Selbsterregung konstant ist oder in zeitlich vorgeschriebener Weise gesteuert wird, habe ich die Theorie in mehreren Arbeiten[1] entwickelt. Im Folgenden will ich mich mit dem praktisch oft noch wichtigeren Fall befassen, daß der Momentvektor eine Funktion des Drehvektors ist, etwa ein Moment, das den Kreisel um eine Hauptachse von der Ruhe oder von einer schon vorhandenen Drehgeschwindigkeit aus bis zu einer vorgeschriebenen Drehgeschwindigkeit oder auch über alle Grenzen schnell antreiben soll.

Zumeist ist aber gar nicht dieses Antriebsproblem (das ja völlig elementar ist) das Wichtigste, sondern die Frage, wie eine solche, zunächst störungsfrei gedachte Antriebsbewegung durch zusätzliche Störungen (wie etwa kleinere oder größere seitliche Drehstöße) geändert wird. Wir werden nämlich sehen, daß (im Gegensatz zum symmetrischen Kreisel) derartige Störungen die eigentliche Antriebsbewegung ganz entscheidend beeinflussen können, so daß die erstrebte Drehgeschwindigkeit nicht und nicht einmal annähernd erreicht wird, ja sogar daß die Bewegung sich umkehrt und in der Drehgeschwindigkeit periodisch wird, oder daß die Drehgeschwindigkeit nach einer Bewegungsumkehr über alle Grenzen wächst. Die Mannigfaltigkeit der zum Teil paradoxen Erscheinungen ist größer, als man wohl erwarten könnte.

Daß unsere Fragestellung für manche Probleme der Raketentechnik bedeutsam ist, brauche ich kaum zu betonen.

Die hier zuständigen *Euler*schen Gleichungen in dem körperfesten, rechtshändigen Hauptachsenkreuz (x, y, z) durch den Schwerpunkt haben mit den Hauptdrehmassen A, B, C, den Komponenten $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ und M_x, M_y, M_z des Drehvektors und des Momentvektors der Selbsterregung und also mit den Trägheitszahlen

$$\alpha_1 = \frac{B-C}{A}, \qquad \alpha_2 = \frac{A-C}{B}, \qquad \alpha_3 = \frac{A-B}{C}, \tag{1}$$

sowie den Momentfunktionen

$$m_x = \frac{M_x}{A}, \qquad m_y = \frac{M_y}{B}, \qquad M_z = \frac{M_z}{C} \tag{2}$$

die Form

$$\frac{d\omega_x}{dt} - \alpha_1 \omega_y \omega_z = m_x, \tag{3}$$

$$\frac{d\omega_y}{dt} + \alpha_2 \omega_z \omega_x = m_y, \tag{4}$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} - \alpha_3 \omega_x \omega_y = m_z. \tag{5}$$

[1] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 21 (1953) S. 149 und 22 (1954) S. 73.

Schreiben wir noch die Rangordnung

$$A > B > C \tag{6}$$

vor, schließen also den symmetrischen Kreisel aus — er wird sich nahher durch eine kurze Bemerkung erledigen lassen —, so sind die drei Trägheitszahlen wesentlich positive Größen:

$$\varkappa_i > 0 \qquad (i = 1, 2, 3) .$$

Im allgemeinsten Falle wären nun also m_x, m_y und m_z vorgeschriebene Funktionen von ω_x, ω_y, ω_z. Es hätte aber wohl wenig Reiz, diese Funktionen beliebig zu wählen (und dann die Lösung des Problems etwa elektronisch durchzuführen); wir wollen hier lieber für vernünftig vorgeschriebene Funktionen, wie sie sich auch technisch leicht verwirklichen lassen, außer der zahlenmäßigen Lösung des Problems allgemeingültige Eigenschaften der Bewegung finden.

Unsere erste Einschränkung für die Funktionen m_x, m_y, m_z besteht darin, daß wir nur Selbsterregungs-Momente betrachten, deren Vektor in einer der drei Hauptachsen liegt; unsere zweite Einschränkung besagt, daß ein solches Moment nur eine Funktion der Drehkomponente jener Hauptachse sein soll.

Wir beginnen mit der x-Achse, setzen also

$$m_x = m_x(\omega_x) , \qquad m_y \equiv 0 , \qquad m_z \equiv 0 . \tag{7}$$

Obwohl es nicht schwer wäre, die Lösung dann für ziemlich allgemeine Funktionen $m_x(\omega_x)$ zu erledigen, so wollen wir — dies ist die dritte Einschränkung — die Momentfunktion m_x mit einer positiven Konstanten μ in der Form

$$m_x = \mu(\omega_0^2 - \omega_x^2) \tag{8}$$

ansetzen, weil sie in dieser Gestalt nicht nur eine sehr durchsichtige explizite Lösung des Problems erlaubt, sondern auch technisch die häufigste Momentart sein mag, die man verwirklicht, um eine gewünschte positive Drehgeschwindigkeit ω_0 um die x-Achse zu erzielen. Denn die zu ω_x^2 proportionale Fliehkraft kann in bekannter Weise zur Regulierung eines solchen Momentes dienen; und man erkennt leicht — wir werden dies natürlich alsbald bestätigen —, daß ein solches Moment mindestens im störungsfreien Falle das Bestreben hat, jede Anfangsgeschwindigkeit $\omega_{x0} > -\omega_0$ gegen den positiven Wert ω_0 hin zu steuern, eine Anfangsgeschwindigkeit $\omega_{x0} < -\omega_0$ aber negativ über alle Grenzen zu treiben.

Die zusammengehörenden Verabredungen $\mu > 0$ und $\omega_0 > 0$ sind dabei nicht irgendwie einschränkend, weil man die positive Richtung der x-Achse stets geeignet wählen kann.

2. Die Grundbewegung. Wir erledigen zuerst den zwar ganz elementaren, aber als Grundlage für unsere spätere eigentliche Untersuchung wichtigen Fall, daß außer der Vorschrift (8) für m_x auch noch $\omega_y \equiv 0$ und $\omega_z \equiv 0$ sein soll, was nach (4) und (5) wegen (7) möglich ist, also den störungsfreien Antrieb. Er gehorcht zufolge (3) und (8) der Differentialgleichung

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \mu(\omega_0^2 - \omega_x^2) . \tag{9}$$

Die Lösung lautet je nach dem Anfangswert ω_{x0} zur Zeit $t = 0$, wie man leicht nachprüft,

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ \text{für } \omega_{x0} > \omega_0: && \omega_x = \omega_0 \operatorname{Ctg}\left(\mu\,\omega_0\,t + \operatorname{Ar\,Ctg}\frac{\omega_{x0}}{\omega_0}\right),\\
&2)\ \text{für } \omega_{x0} = \omega_0: && \omega_x = \omega_0 ,\\
&3)\ \text{für } -\omega_0 < \omega_{x0} < \omega_0: && \omega_x = \omega_0 \operatorname{Tg}\left(\mu\,\omega_0\,t + \operatorname{Ar\,Tg}\frac{\omega_{x0}}{\omega_0}\right),\\
&4)\ \text{für } \omega_{x0} = -\omega_0: && \omega_x = -\omega_0 ,\\
&5)\ \text{für } \omega_{x0} < -\omega_0: && \omega_x = \omega_0 \operatorname{Ctg}\left(\mu\,\omega_0\,t + \operatorname{Ar\,Ctg}\frac{\omega_{x0}}{\omega_0}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

und wird dargestellt durch Kurven, die in Abb. 1 die entsprechenden Nummern tragen. Die Zeit t_0 der größten Winkelbeschleunigung in der Kurve $3''$ und die Grenzzeit t_∞ in der Kurve 5 sind

$$t_0 = \frac{1}{\mu\,\omega_0} \operatorname{Ar\,Tg} \frac{-\omega_{x0}}{\omega_0}, \qquad t_\infty = \frac{1}{\mu\,\omega_0} \operatorname{Ar\,Ctg} \frac{-\omega_{x0}}{\omega_0} . \tag{11}$$

Wir wollen diese störungsfreie Antriebsbewegung die Grundbewegung nennen.

Es ist nun für die spätere Berechnung der durch zusätzliche seitliche Drehstöße gestörten Grundbewegung bedeutungsvoll, die Lösung für die Grundbewegung in einer zweiten, anderen Gestalt zu wiederholen, die zudem alle fünf Fälle in einer Gleichungsform zusammenfaßt, indem man statt der Zeit t den von $t = 0$ aus gemessenen Drehwinkel

$$\varphi_x = \int_0^t \omega_x \, dt \tag{12}$$

als unabhängige Variable einführt (die nachher den Schlüssel zur Lösung des Störungsproblems bilden wird). Multipliziert man (9) mit $\omega_x = d\varphi_x/dt$, so kommt als neue Differentialgleichung der Grundbewegung

$$\frac{d(\omega_x^2)}{d\varphi_x} + 2\,\mu\,\omega_x^2 = 2\,\mu\,\omega_0^2\,, \tag{13}$$

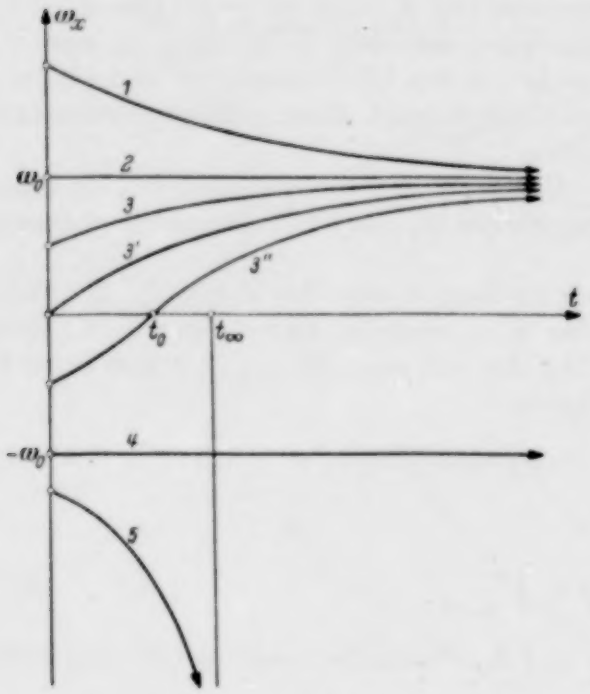


Abb. 1.

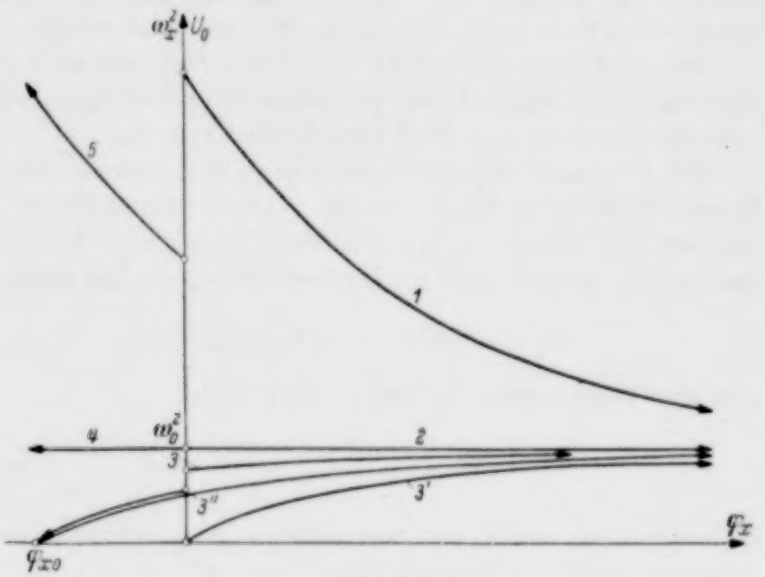


Abb. 2.

und diese hat die schon an die Anfangsbedingung $\omega_x = \omega_{x0}$ für $t = 0$, also für $\varphi_x = 0$ angepaßte Lösung

$$\omega_x = \sqrt{U_0(\varphi_x)} \tag{14}$$

mit

$$U_0(\varphi_x) \equiv \omega_0^2 + (\omega_{x0}^2 - \omega_0^2)\, e^{-2\mu\varphi_x}\,, \tag{15}$$

wobei über das jeweilige Vorzeichen von $\sqrt{U_0(\varphi_x)}$ in (14) später noch Festsetzungen zu treffen sein werden.

Wir merken nur noch an, daß aus (14) durch eine Quadratur

$$t = \int_0^{\varphi_x} \frac{d\varphi_x}{\sqrt{U_0(\varphi_x)}} = t(\varphi_x) \tag{16}$$

und dann durch Funktionsumkehr

$$\varphi_x = \varphi_x(t) \tag{17}$$

folgt, womit ω_x gemäß (14) wieder als Funktion von t dargestellt ist. Würde man die Integration (16) und die Funktionsumkehr (17) ausführen, so käme man natürlich gerade wieder auf die Lösungen (10) der Grundbewegung.

Die Deutung der Lösung (14), (15) ist in Abb. 2 angegeben, wo die Bewegungen *1*, *2*, *3*, *3'*, *3''*, *4* und 5 von Abb. 1 mit den gleichen Nummern als Kurven dargestellt sind. Dabei ist zu beachten, daß $d\varphi_x$ gemäß (12) stets das gleiche Vorzeichen wie ω_x hat, ferner daß $\varphi_x = 0$ zu $t = 0$ gehört, weiter daß gemäß (14) nur positive Werte der Ordinate U_0 zu einer reellen Bewegung gehören, und endlich daß das Vorzeichen von $\sqrt{U_0}$ wegen (14) stets das gleiche ist wie das von ω_x.

So sind die Kurven *1*, *2*, *3* und *3'* ohne weiteres verständlich. Bei der Kurve *3''* ist anfänglich $\omega_x < 0$, also auch $\sqrt{U_0}$ negativ bis zu dem Wert φ_{x_0}, für welchen $U_0 = 0$, also die Drehung $\omega_x = 0$ wird, nämlich gemäß (15)

$$\varphi_{x_0} = \frac{1}{2\mu} \ln\left(1 - \frac{\omega_{x0}^2}{\omega_0^2}\right) < 0 . \tag{18}$$

Dann kehrt die Drehrichtung von ω_x um, da nunmehr $\sqrt{U_0}$ und $d\varphi_x$ positiv werden; der rechtsgerichtete Pfeil deutet hier wie schon bei den Kurven *1*, *2*, *3* und *3'* an, daß der Drehwert ω_0 asymptotisch angestrebt wird. Bei den Kurven *4* und *5* ist dauernd $\sqrt{U_0} < 0$ und $d\varphi_x < 0$, was negativ konstante bzw. negativ über alle Grenzen wachsende Drehgeschwindigkeit ω_x bedeutet. Alles dies ist natürlich in voller Übereinstimmung mit den in Abb. 1 dargestellten Bewegungen.

3. Die gestörte Bewegung. Während für einen symmetrischen Kreisel ($B = C$, also $\alpha_1 = 0$) diese Grundbewegung ω_x gar nicht von etwa hinzukommenden seitlichen Drehungen ω_y und ω_z beeinflußt wird, weil mit $\alpha_1 = 0$ die Gleichung (3) nicht mehr mit den Gleichungen (4) und (5) verkoppelt ist, so kann die Grundbewegung beim unsymmetrischen Kreisel durch seitliche Drehstöße ganz wesentlich gestört werden, wie wir jetzt zeigen wollen.

Der bisherige Nullpunkt $t = 0$ der Zeit soll also der Beginn einer Störbewegung ω_y, ω_z sein, die den Gleichungen (4) und (5) gehorcht und mit den Anfangswerten ω_{y0} und ω_{z0} einsetzt, von denen mindestens einer von Null verschieden sein soll.

Mit der unabhängigen Variabeln φ_x (12) anstelle der Zeit t gelingt es nun, das in ω_x, ω_y, ω_z nichtlineare System (3) bis (5) in ein System überzuführen, das in ω_x^2 sowie ω_y und ω_z linear ist. Man erkennt das sofort an den beiden Gleichungen (4) und (5), die, wie man für $m_y \equiv 0$ und $m_z \equiv 0$ nachprüft, ausgedrückt im Drehwinkel φ_x die Lösungen haben

$$\omega_y = \omega_1 \sqrt{\alpha_2} \cos\left(\sqrt{\alpha_2 \alpha_3}\,\varphi_x + \varrho\right), \qquad \omega_z = \omega_1 \sqrt{\alpha_3} \sin\left(\sqrt{\alpha_2 \alpha_3}\,\varphi_x + \varrho\right) \tag{19}$$

mit den Konstanten ω_1 und ϱ, die durch

$$\omega_1^2 = \frac{\omega_{y0}^2}{\alpha_2} + \frac{\omega_{z0}^2}{\alpha_3}, \qquad \operatorname{tg}\varrho = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_3}}\,\frac{\omega_{z0}}{\omega_{y0}} \tag{20}$$

definiert sind, wobei wir also jetzt $\omega_1 \neq 0$ voraussetzen und die Quadratwurzeln in (19) und (20) sowie ω_1 positiv wählen dürfen.

Mit (19) und (8) geht die Gleichung (3) über in

$$\frac{d(\omega_x^2)}{d\varphi_x} + 2\mu\,\omega_x^2 = 2\mu\,\omega_0^2 + \omega_1^2\,\alpha_1 \sqrt{\alpha_2 \alpha_3}\,\sin 2\left(\sqrt{\alpha_2 \alpha_3}\,\varphi_x + \varrho\right), \tag{21}$$

also in der Tat in eine nun in ω_x^2 lineare Differentialgleichung. Ihre Lösung lautet

$$\omega_x = \sqrt{U(\varphi_x)}\,; \tag{22}$$

dabei ist

$$U(\varphi_x) \equiv U_0(\varphi_x) - U_1(\varphi_x) \tag{23}$$

mit der früheren Grundfunktion $U_0(\varphi_x)$ (15) und mit der Störungsfunktion

$$U_1(\varphi_x) \equiv \frac{1}{2}\,\omega_1^2\,\frac{\alpha_1 \sqrt{\alpha_2 \alpha_3}}{\varkappa}\left[\cos 2\left(\sqrt{\alpha_2 \alpha_3}\,\varphi_x + \varrho + \sigma\right) - \cos 2\,(\varrho + \sigma)\,e^{-2\mu\varphi_x}\right], \tag{24}$$

und hierin sind (neben den früheren Konstanten ω_1 und ϱ) die beiden weiteren Konstanten $\varkappa$ und σ definiert durch

$$\varkappa = \sqrt{\mu^2 + \alpha_2 \alpha_3}, \qquad \operatorname{tg}\sigma = \frac{\mu}{\sqrt{\alpha_2 \alpha_3}} \tag{25}$$

mit positiven Vorzeichen der Quadratwurzeln.

Die Störung drückt sich also darin aus, daß von der Grundfunktion $U_0(\varphi_x)$ die Störungsfunktion $U_1(\varphi_x)$ abzuziehen ist.

Wir bemerken noch, daß für $\varphi_x = 0$, also $t = 0$

$$U(0) = \omega_{x0}^2, \qquad U_1(0) = 0 \tag{26}$$

wird, so daß die Lösung (22) die Anfangsbedingung erfüllt.

Die Mannigfaltigkeit der Bewegungen ω_x, die durch (22) bis (24) dargestellt sind, insbesondere die Mannigfaltigkeit der Abweichungen von den zugehörigen Grundbewegungen (14) und (15), wie sie infolge der durch (20) ausgedrückten Störungen auftreten können, ist erstaunlich groß, wie der Vergleich unserer früheren Abb. 2 der Grundbewegungen mit den Abb. 3 bis 6 der gestörten Bewegungen zeigt, die wir jetzt erklären wollen (und die nur eine Auswahl aus vielen numerisch berechneten Kurvenblättern wiedergeben).

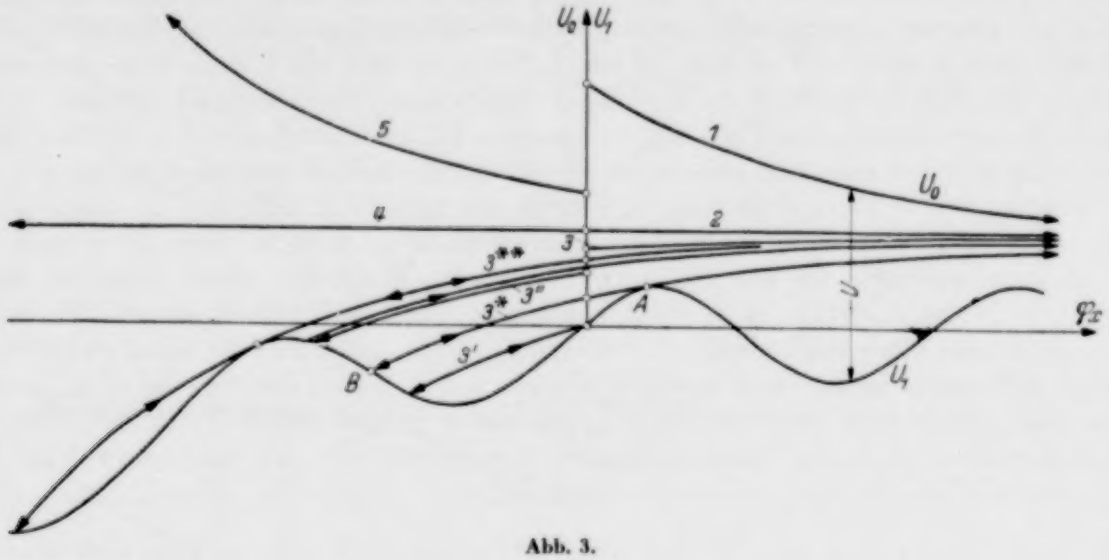


Abb. 3.

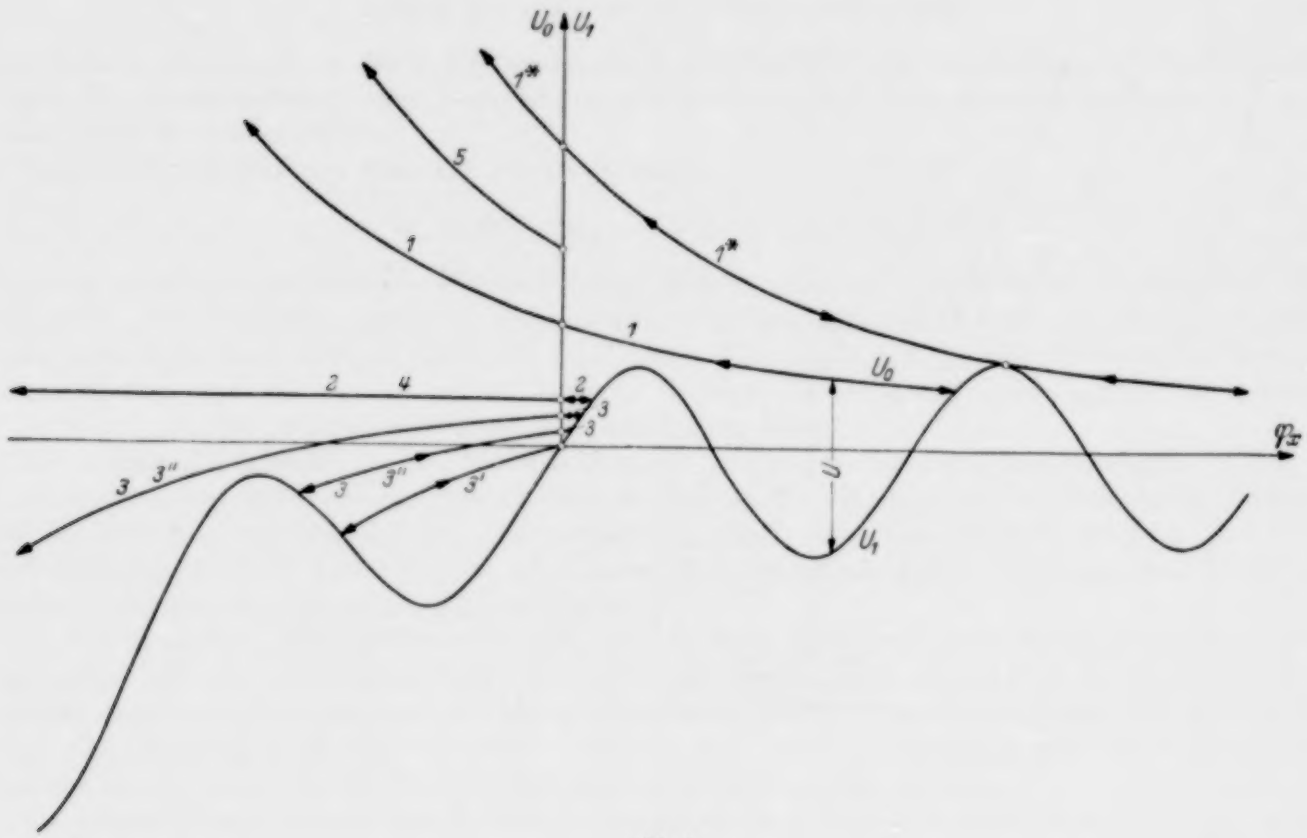


Abb. 4.

Abb. 3 und 4 gelten für $\cos 2(\varrho + \sigma) > 0$, Abb. 5 und 6 für $\cos 2(\varrho + \sigma) < 0$, und zwar Abb. 3 und 5 für eine kleine, Abb. 4 und 6 für eine große Störung (je verglichen mit der angestrebten Drehgeschwindigkeit ω_0). Die Nummern der Kurven in Abb. 3 bis 6 entsprechen den Nummern in Abb. 2. Die Ordinatendifferenz der Kurven $U_0(\varphi_x)$ und $U_1(\varphi_x)$ ist nach (22) und (23) ein Maß für ω_x^2, und die Kurven $U_0(\varphi_x)$ sind jeweils nur soweit eingezeichnet, als $U > 0$ bleibt; und auch hier ist wieder zu beachten, daß $d\varphi_x$ und $\sqrt{U}$ stets das gleiche Vorzeichen wie ω_x haben.

Im Einzelnen bemerken wir zu Abb. 3: Bei den Kurven *1*, *2*, *3*, *4* und *5* unterscheiden sich die gestörten Bewegungen von der Grundbewegung nur dadurch, daß noch eine (von ω_1 abhängige) Schwankung in ω_x hinzukommt, so daß also der angestrebte Wert ω_0 auch nicht mehr asymptotisch

genau erreichbar ist, sondern schließlich mehr und mehr genau umtanzt wird — man könnte das eine periodisch-asymptotische Annäherung nennen.

Bei hinreichend kleinen Anfangswerten $|\omega_{x0}|$ tritt das ein, was für $\omega_{x0} = 0$ in Kurve $3'$ dargestellt ist, nämlich ein periodisches Hin- und Herschwanken von ω_x zwischen einem positiven und einem ebenso großen negativen Wert, aber keinerlei Annäherung mehr an den angestrebten Wert ω_0.

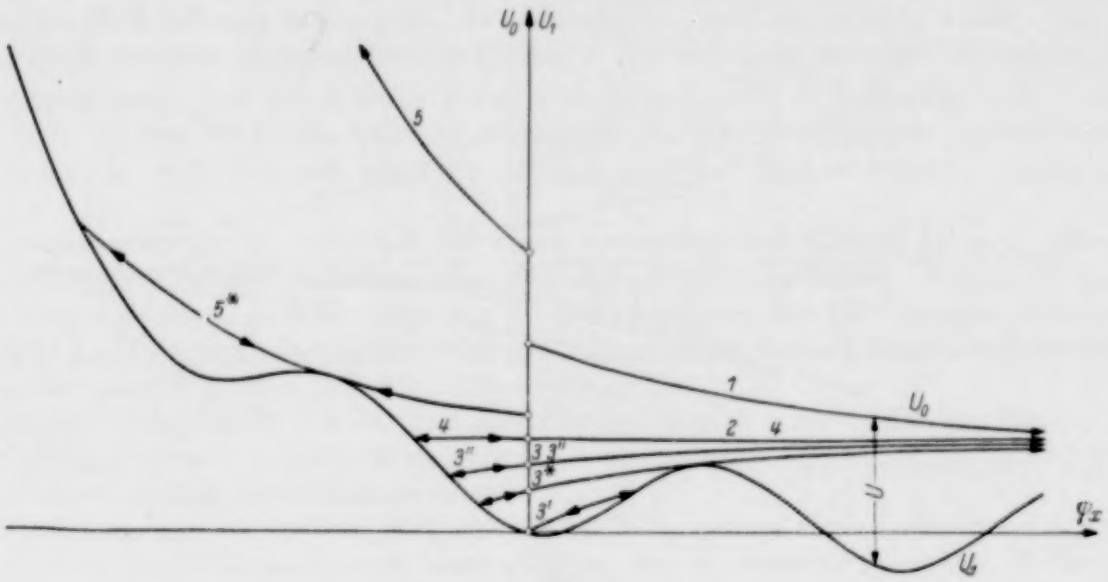


Abb. 5.

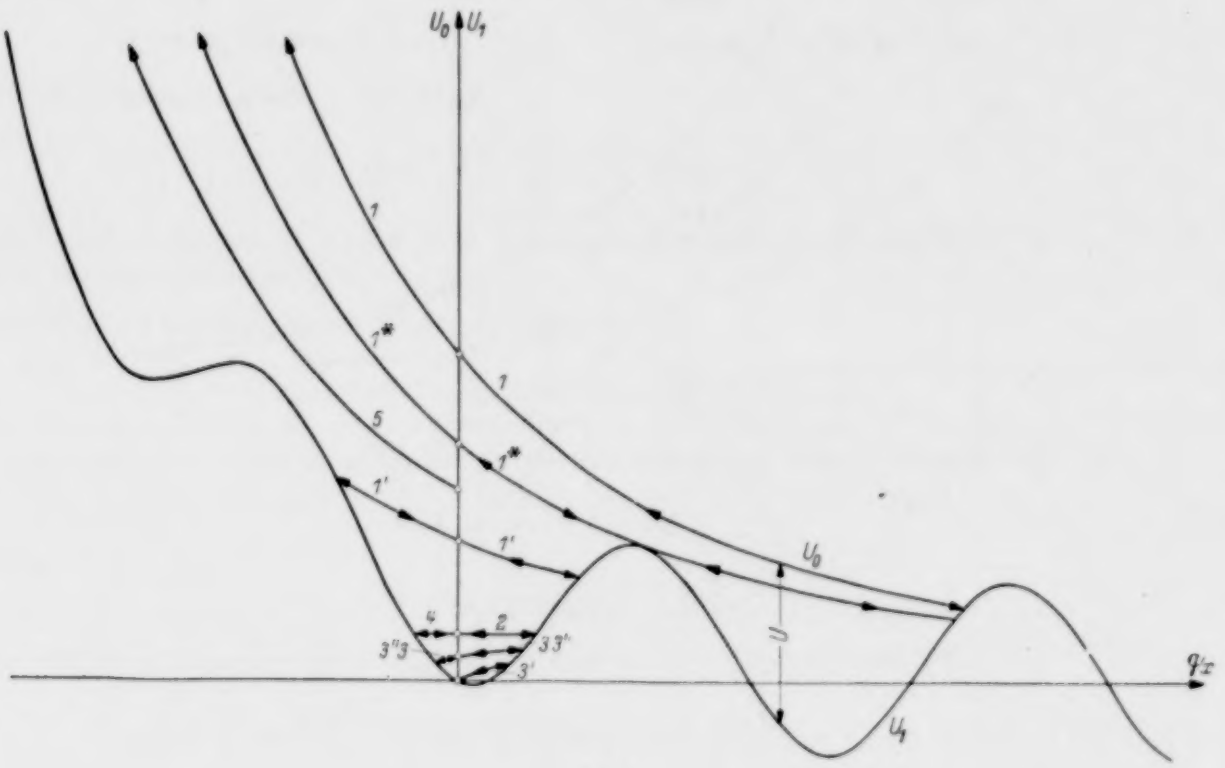


Abb. 6.

Die Bewegung $3''$ zeigt das gleiche Verhalten wie die Grundbewegung $3''$ in Abb. 2, nur daß sie sich nach einer Richtungsumkehr dem Wert ω_0 bloß periodisch-asymptotisch nähert.

Ganz neuartig und aus dem Rahmen der Grundbewegung völlig herausfallend sind die Bewegungen 3^* und 3^{**} in Abb. 3. Fängt die Bewegung 3^* mit einem positiven Wert ω_{x0} an, so nähert sich die Kurve dem Punkt A, und zwar, wie man zeigen kann, erst mit $t \to \infty$. Dort ist die Drehkomponente $\omega_x = 0$, was aber keineswegs Ruhe bedeutet, da die pulsierenden Drehungen ω_y und ω_z nach (19) vorhanden sind, die einen in der (y, z)-Ebene umlaufenden Drehvektor bilden. Der Zustand im Punkte A ist, wie man ebenfalls zeigen kann, labil in dem Sinne, daß ω_x jetzt von Null an in positiver oder negativer Richtung zu wachsen vermag, allerdings theoretisch auch erst nach unendlich langer Zeit, praktisch aber bei einem zufälligen kleinen Anstoß schon nach endlicher

Zeit. Das bedeutet Fortschreiten auf der Kurve 3^* entweder nach rechts mit periodisch-asymptotischer Annäherung an ω_0, oder nach links mit Umkehr im Punkte B und Wiederholung des ganzen Spiels. Ähnliches gilt für die Kurve 3^{**}.

Nach dieser ausführlichen Erklärung von Abb. 3 werden Abb. 4 bis 6 von selbst verständlich sein. Außer den schon bei Abb. 3 besprochenen Effekten kann infolge einer starken Störung noch der Fall eintreten, daß bei keiner Anfangsgeschwindigkeit ω_{x0} eine wenigstens periodisch-asymptotische Annäherung an den erstrebten Wert ω_0 möglich ist, sondern daß (außer periodischen Bewegungen) stets nach einer Bewegungsumkehr die Drehgeschwindigkeit ω_x negativ über alle Grenzen wächst; dies zeigen in Abb. 4 die Kurven *1*, 1^*, *2* und $3''$, und in Abb. 6 die Kurven *1* und 1^*.

Übrigens sind die Doppelstriche, wie wir sie in Abb. 2 bei Kurve $3''$ angebracht hatten, weiterhin überall (außer bei Kurve $3''$ in Abb. 3) weggelassen, um die Übersichtlichkeit nicht zu gefährden, und auch weil sie an manchen Stellen offensichtlich sogar mehrmals oder beliebig oft hätten wiederholt werden müssen. In Abb. 5 könnte die Kurve 5^* natürlich nach rechts fortgesetzt werden (wie eine Kurve *1*), und in Abb. 6 könnte man die Kurve $1'$ auch 5^* bennnnen. Man sieht leicht, daß es noch viele weitere Kurventypen gibt, als die eingezeichneten, z. B. in Abb. 6 eine Kurve 5^{**}, deren linker Teil vom Typ der Kurve 5^* in Abb. 5 wäre.

Wir erwähnen noch, daß man ω_x, ω_y, ω_z „explizit" als Funktionen von t ganz nach dem Schema von (16) und (17) darzustellen hätte, nur natürlich mit dem Unterschied gegen Ziff. 2, daß die bei der Quadratur (16) und bei der Funktionsumkehr (17) auftretenden Funktionen bisher nicht tabuliert sind und wegen der großen Anzahl der Parameter auch kaum allgemein tabuliert werden könnten.

4. Schlußbemerkungen. Der Vollständigkeit halber merken wir noch an, daß der Fall

$$m_x \equiv 0\,, \qquad m_y \equiv 0\,, \qquad m_z = \mu(\omega_0^2 - \omega_z^2) \tag{27}$$

eines Antriebsmomentes in der z-Achse sich durch die gleiche Rechnung erledigen läßt und zu gleichartigen Ergebnissen führt; man braucht nur die entsprechende Vertauschung der Indices x und z sowie 1 und 3 vorzunehmen.

Aber auch der Fall des Antriebs um die y-Achse

$$m_x \equiv 0\,, \qquad m_y = \mu(\omega_0^2 - \omega_y^2)\,, \qquad m_z \equiv 0 \tag{28}$$

gehorcht einem ebenso gebauten Formelsystem, jedoch mit einem wesentlichen Unterschied. Man muß jetzt x mit y sowie $\varkappa_2$ mit $-\varkappa_1$ vertauschen, und dann gehen die Kreisfunktionen in Hyperbelfunktionen über, und es sind dabei die zwei Unterfälle $\omega_{x0}/\varkappa_1 \lessgtr \omega_{z0}/\varkappa_3$ in der gleichen Weise zu unterscheiden, wie ich das an einem anderen Problem früher getan habe[1], wobei der Grenzfall $\omega_{x0}/\varkappa_1 = \omega_{z0}/\varkappa_3$ durch einen einfachen Grenzübergang folgt.

Die weitere Diskussion ergibt, daß das Moment m_y die erstrebte Drehgeschwindigkeit ω_0 bei der kleinsten Störung stabil erzielen kann. Dies steht ganz im Einklang mit der bekannten Tatsache, daß die Drehung um die mittlere Hauptachse y selbst ohne Moment stets labil ist, und daher wird dem Antrieb (28) kaum je eine praktische Bedeutung zukommen (weswegen wir darauf verzichten, sein Formelsystem explizit anzugeben).

Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß die hier nicht beachteten Reibungseinflüsse unsere Ergebnisse teilweise einzuschränken vermögen, weil sie die Schwankung (19) des Drehvektors der Störung mehr oder weniger rasch abklingen lassen, so daß dann die Bewegungen der starken Störung (Abb. 4 und 6) in die der schwachen Störung (Abb. 3 und 5) übergehen oder sich sogar genähert oder praktisch genau in die Grundbweegung zurückverwandeln können.

In vielen Fällen ist mit der Kenntnis der Größe und Lage des Drehvektors (ω_x, ω_y, ω_z) im Körper das technische Problem schon gelöst. Will man auch die Bewegung des Körpers im Raum als Funktion der Zeit kennen, so hat man aus den Komponenten ω_x, ω_y, ω_z des Drehvektors etwa die drei *Euler*schen Stellungswinkel des Körpers zu bestimmen. Die Methode zur Lösung dieser einfachen kinematischen Aufgabe ist aber wohlbekannt[2] und muß nur noch auf die jetzigen Funktionen $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$ und $\omega_z(t)$ angewendet werden, was allerdings recht umständliche Rechnungen mit sich bringt.

(Eingegangen am 17. Juli 1959)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *R. Grammel*, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101.

[1] Vgl. S. 85 der in Fußnote [1] von S. 153 zitierten zweiten Untersuchung.
[2] Siehe etwa: *R. Grammel*, Der Kreisel, Bd. 1, § 9, Ziff. **6**, 2. Aufl. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950.

Druckfehler-Berichtigung

Auf Seite 159 dieses Bandes muß es in der Text-Zeile 16 von unten heißen:

genau erreichbar ist, sondern schließlich mehr und mehr genau umtanzt wird — man könnte das eine periodisch-asymptotische Annäherung nennen.

Bei hinreichend kleinen Anfangswerten $|\omega_{x0}|$ tritt das ein, was für $\omega_{x0} = 0$ in Kurve $3'$ dargestellt ist, nämlich ein periodisches Hin- und Herschwanken von ω_x zwischen einem positiven und einem ebenso großen negativen Wert, aber keinerlei Annäherung mehr an den angestrebten Wert ω_0.

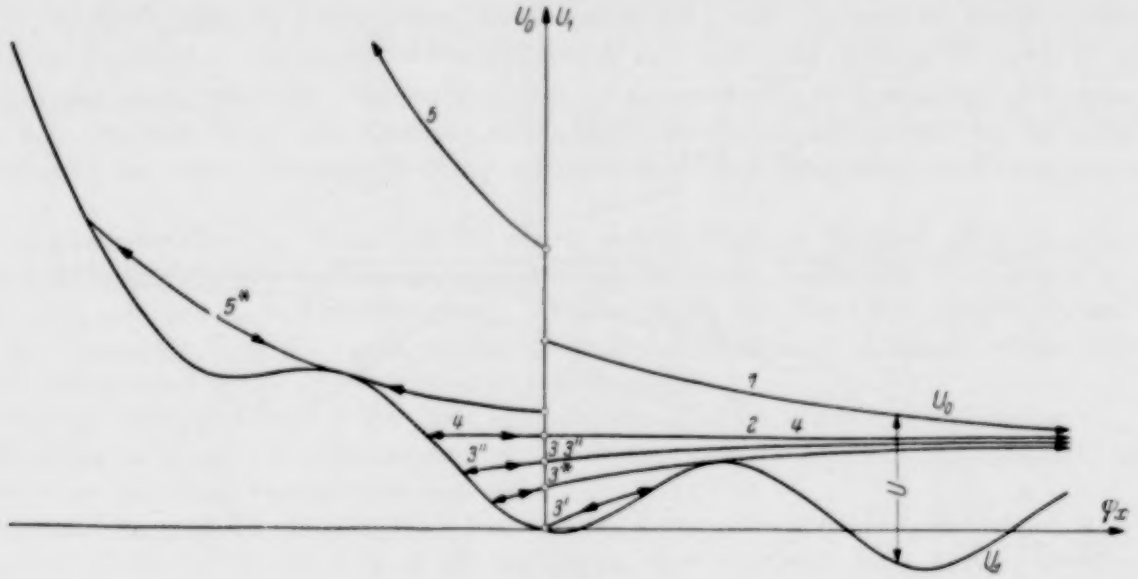


Abb. 5.

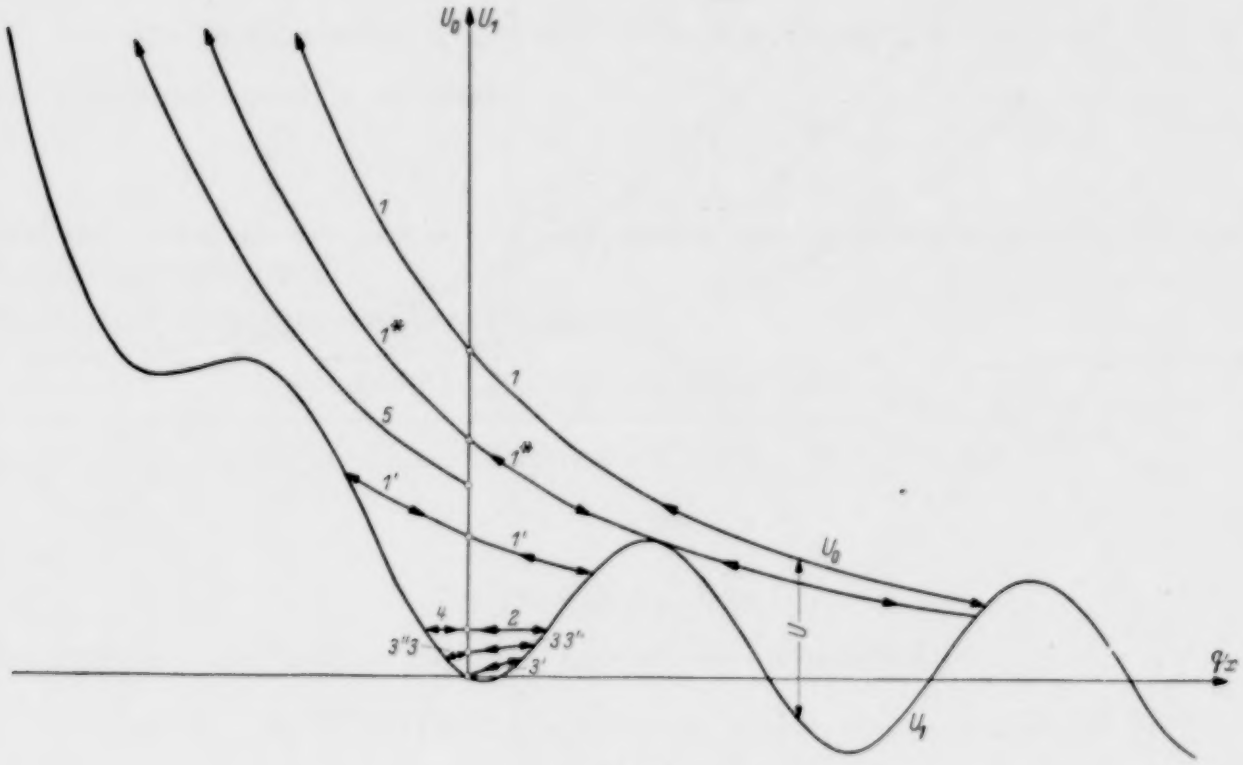


Abb. 6.

Die Bewegung $3''$ zeigt das gleiche Verhalten wie die Grundbewegung $3''$ in Abb. 2, nur daß sie sich nach einer Richtungsumkehr dem Wert ω_0 bloß periodisch-asymptotisch nähert.

Ganz neuartig und aus dem Rahmen der Grundbewegung völlig herausfallend sind die Bewegungen 3^* und 3^{**} in Abb. 3. Fängt die Bewegung 3^* mit einem positiven Wert ω_{x0} an, so nähert sich die Kurve dem Punkt A, und zwar, wie man zeigen kann, erst mit $t \to \infty$. Dort ist die Drehkomponente $\omega_x = 0$, was aber keineswegs Ruhe bedeutet, da die pulsierenden Drehungen ω_y und ω_z nach (19) vorhanden sind, die einen in der (y, z)-Ebene umlaufenden Drehvektor bilden. Der Zustand im Punkte A ist, wie man ebenfalls zeigen kann, labil in dem Sinne, daß ω_x jetzt von Null an in positiver oder negativer Richtung zu wachsen vermag, allerdings theoretisch auch erst nach unendlich langer Zeit, praktisch aber bei einem zufälligen kleinen Anstoß schon nach endlicher

Zeit. Das bedeutet Fortschreiten auf der Kurve 3^* entweder nach rechts mit periodisch-asymptotischer Annäherung an ω_0, oder nach links mit Umkehr im Punkte B und Wiederholung des ganzen Spiels. Ähnliches gilt für die Kurve 3^{**}.

Nach dieser ausführlichen Erklärung von Abb. 3 werden Abb. 4 bis 6 von selbst verständlich sein. Außer den schon bei Abb. 3 besprochenen Effekten kann infolge einer starken Störung noch der Fall eintreten, daß bei keiner Anfangsgeschwindigkeit ω_{x0} eine wenigstens periodisch-asymptotische Annäherung an den erstrebten Wert ω_0 möglich ist, sondern daß (außer periodischen Bewegungen) stets nach einer Bewegungsumkehr die Drehgeschwindigkeit ω_x negativ über alle Grenzen wächst; dies zeigen in Abb. 4 die Kurven *1*, 1^*, *2* und $3''$, und in Abb. 6 die Kurven *1* und 1^*.

Übrigens sind die Doppelstriche, wie wir sie in Abb. 2 bei Kurve $3''$ angebracht hatten, weiterhin überall (außer bei Kurve $3''$ in Abb. 3) weggelassen, um die Übersichtlichkeit nicht zu gefährden, und auch weil sie an manchen Stellen offensichtlich sogar mehrmals oder beliebig oft hätten wiederholt werden müssen. In Abb. 5 könnte die Kurve 5^* natürlich nach rechts fortgesetzt werden (wie eine Kurve *1*), und in Abb. 6 könnte man die Kurve $1'$ auch 5^* bennnnen. Man sieht leicht, daß es noch viele weitere Kurventypen gibt, als die eingezeichneten, z. B. in Abb. 6 eine Kurve 5^{**}, deren linker Teil vom Typ der Kurve 5^* in Abb. 5 wäre.

Wir erwähnen noch, daß man ω_x, ω_y, ω_z „explizit" als Funktionen von t ganz nach dem Schema von (16) und (17) darzustellen hätte, nur natürlich mit dem Unterschied gegen Ziff. **2**, daß die bei der Quadratur (16) und bei der Funktionsumkehr (17) auftretenden Funktionen bisher nicht tabuliert sind und wegen der großen Anzahl der Parameter auch kaum allgemein tabuliert werden könnten.

4. Schlußbemerkungen. Der Vollständigkeit halber merken wir noch an, daß der Fall

$$m_x \equiv 0\,, \qquad m_y \equiv 0\,, \qquad m_z = \mu(\omega_0^2 - \omega_z^2) \tag{27}$$

eines Antriebsmomentes in der z-Achse sich durch die gleiche Rechnung erledigen läßt und zu gleichartigen Ergebnissen führt; man braucht nur die entsprechende Vertauschung der Indices x und z sowie 1 und 3 vorzunehmen.

Aber auch der Fall des Antriebs um die y-Achse

$$m_x \equiv 0\,, \qquad m_y = \mu(\omega_0^2 - \omega_y^2)\,, \qquad m_z \equiv 0 \tag{28}$$

gehorcht einem ebenso gebauten Formelsystem, jedoch mit einem wesentlichen Unterschied. Man muß jetzt x mit y sowie $\varkappa_2$ mit $-\varkappa_1$ vertauschen, und dann gehen die Kreisfunktionen in Hyperbelfunktionen über, und es sind dabei die zwei Unterfälle $\omega_{x0}/\varkappa_1 \lessgtr \omega_{z0}/\varkappa_3$ in der gleichen Weise zu unterscheiden, wie ich das an einem anderen Problem früher getan habe[1], wobei der Grenzfall $\omega_{x0}/\varkappa_1 = \omega_{z0}/\varkappa_3$ durch einen einfachen Grenzübergang folgt.

Die weitere Diskussion ergibt, daß das Moment m_y die erstrebte Drehgeschwindigkeit ω_0 bei der kleinsten Störung stabil erzielen kann. Dies steht ganz im Einklang mit der bekannten Tatsache, daß die Drehung um die mittlere Hauptachse y selbst ohne Moment stets labil ist, und daher wird dem Antrieb (28) kaum je eine praktische Bedeutung zukommen (weswegen wir darauf verzichten, sein Formelsystem explizit anzugeben).

Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß die hier nicht beachteten Reibungseinflüsse unsere Ergebnisse teilweise einzuschränken vermögen, weil sie die Schwankung (19) des Drehvektors der Störung mehr oder weniger rasch abklingen lassen, so daß dann die Bewegungen der starken Störung (Abb. 4 und 6) in die der schwachen Störung (Abb. 3 und 5) übergehen oder sich sogar genähert oder praktisch genau in die Grundbweegung zurückverwandeln können.

In vielen Fällen ist mit der Kenntnis der Größe und Lage des Drehvektors (ω_x, ω_y, ω_z) im Körper das technische Problem schon gelöst. Will man auch die Bewegung des Körpers im Raum als Funktion der Zeit kennen, so hat man aus den Komponenten ω_x, ω_y, ω_z des Drehvektors etwa die drei *Euler*schen Stellungswinkel des Körpers zu bestimmen. Die Methode zur Lösung dieser einfachen kinematischen Aufgabe ist aber wohlbekannt[2] und muß nur noch auf die jetzigen Funktionen $\omega_x(t)$, $\omega_y(t)$ und $\omega_z(t)$ angewendet werden, was allerdings recht umständliche Rechnungen mit sich bringt.

(Eingegangen am 17. Juli 1959)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *R. Grammel*, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101.

[1] Vgl. S. 85 der in Fußnote [1] von S. 153 zitierten zweiten Untersuchung.
[2] Siehe etwa: *R. Grammel*, Der Kreisel, Bd. 1, § 9, Ziff. **6**, 2. Aufl. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950.

Druckfehler-Berichtigung

Auf Seite 159 dieses Bandes muß es in der Text-Zeile 16 von unten heißen:

„nicht stabil" statt „stabil"

Zur Theorie der Unterwassertragflügel bei wellenförmiger Anströmung

Von W. H. Isay

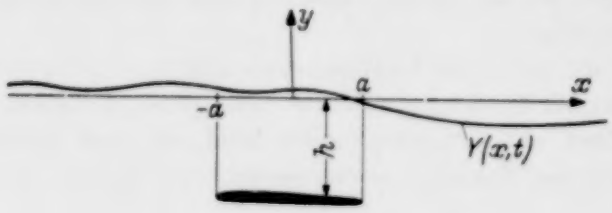
1. Einleitung. In meiner vorangehenden Arbeit[1] habe ich das stationäre Problem von nahe der Wasseroberfläche fahrenden Tragflügeln (homogene Anströmung) behandelt. Vielfach befinden sich Unterwassertragflügel jedoch in einer wellenförmigen Anströmung, so daß sich der am Profil wirksame Anströmwinkel dauernd ändert, und somit ein instationäres Problem vorliegt.

Die ersten Untersuchungen über instationäre Unterwassertragflügel wurden von *Kaplan*[2] durchgeführt. Jedoch wird in diesen Arbeiten (wie ja verschiedentlich auch in der stationären Theorie, vgl. Einleitung Arbeit I) die Strömungsrandbedingung am Flügelprofil nicht erfüllt, und daher bleiben auch die Wirbelstärke (Zirkulation) und die Größe der Flügelkräfte unbestimmt und werden durch Ausdrücke aus der Hydrodynamik der Flügel im unbegrenzten Medium ergänzt.

In einer kürzlich veröffentlichten Arbeit[3] wird unter Vernachlässigung der Schwerkraft [$g = 0$, d. h. in dem Sonderfall sehr hoher Froudescher Zahlen] die Randbedingungsintegralgleichung aufgestellt und gelöst.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Theorie des instationären Unterwassertragflügels angegeben, die auch die Auflösung der aus der Strömungsrandbedingung am Flügelprofil entstehenden Integralgleichung für die Flügelzirkulation einschließt. Ferner werden die Flügelkräfte und die Form der freien Wasseroberfläche in der Nähe des Tragflügels berechnet. Wie in Arbeit I wird auch hier die Strömung als eben vorausgesetzt (unendliche Spannweite). Die numerische Auswertung dieser Theorie durch Zahlenbeispiele soll einer weiteren Arbeit vorbehalten bleiben.

2. Das Geschwindigkeitspotential eines Wirbels unter der Wasseroberfläche bei wellenförmiger Anströmung. Wir betrachten eine Tragfläche in der mittleren Tiefe h unter der bei $y \approx 0$ liegenden Wasseroberfläche. Die Tragfläche liege in einer Anströmung, die sich aus einem homogenen Hauptanteil u_0 und den noch genauer zu definierenden wellenförmigen Anteilen $u_1(x, y, t)$ und $v_1(x, y, t)$ zusammensetzt, wo u und v die x- und y-Komponente der Geschwindigkeit bedeuten. Dabei sei $u_1^2 \ll u_0^2$, $v_1^2 \ll u_0^2$. Die Tragfläche werde wie üblich durch eine gebundene Wirbeldichte $\gamma(\xi, t)$ $(-a \leqq \xi \leqq a)$ ersetzt. Da es sich um ein instationäres Problem handelt, werden durch die zeitliche Änderung der gebundenen Wirbel freie Wirbel induziert, die mit der Strömung hinter der Tragfläche abfließen. Um später die für dieses Problem benötigten Ausdrücke bequem durch Superposition bilden zu können, wollen wir zunächst das Geschwindigkeitspotential Φ_γ eines an der Stelle $(\xi, -h)$ gelegenen Wirbels $a\,\gamma(\xi, t)$ ableiten.



An der Wasseroberfläche ist der Druck überall konstant. Aus der Bernoullischen Gleichung erhält man dann unter der Voraussetzung, daß das Quadrat aller durch den Tragflügel auftretenden Störgeschwindigkeiten klein ist gegen u_0^2 und mit Φ_1 als Geschwindigkeitspotential des Wellenanteils der Anströmung

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_1 + \Phi_\gamma) + u_0 \frac{\partial}{\partial x}(\Phi_1 + \Phi_\gamma) + g\,Y = c(t)\,.$$

---

[1] *W. H. Isay*, Ing.-Arch. 27 (1959) S. 295 (Arbeit I).

[2] *P. Kaplan*, A hydrodynamic theory for the forces on hydrofoils in unsteady motion, Dr. Sc. Thesis, Stevens Inst. of Technology Hoboken, New Jersey, 1955. (Herrn Prof. Dr.-Ing. *G. Weinblum*, Hamburg, danke ich für die freundliche Überlassung dieser Arbeit).

P. Kaplan, The drag of hydrofoils in unsteady motion, Stevens Inst. of Techn, ETT Report 617.

P. Kaplan, The forces acting on hydrofoils in unsteady motion; Proc, 9th Int. Congress of Applied Mechanics, Brüssel 1956.

P. Kaplan, The Waves generated by the forward motion of oscillatory pressure distributions, 5th Midwestern Conference on Fluid Mechanics 1957.

P. Kaplan, The forces and moments acting on a tandem hydrofoil system in waves, Stevens Inst. of Techn. ETT Report 506.

[3] Wen-Hwa-Chu und Abramson, J. ship research 3 (1959) S. 50.

Dabei gibt $Y(x, t)$ die genaue Form der Wasseroberfläche an. Weit vor dem Flügel (für $x \to -\infty$) übt dieser keinen Einfluß mehr aus; es bleibt dort also

$$g\, Y(x, t) = c(t) - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - u_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\,.$$

Da bei einer wellenförmigen Anströmung mit der Wellenlänge l für jeden Zeitpunkt t

$$\lim_{x \to -\infty} \int_x^{x+l} Y(x,t)\, dx = 0$$

sein muß, folgt $c(t) = 0$. Damit erhalten wir für die Form der freien Wasseroberfläche

$$Y(x, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_1 + \Phi_\gamma) - \frac{u_0}{g} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_1 + \Phi_\gamma)\,. \tag{1}$$

Die kinematische Strömungsrandbedingung an der freien Wasseroberfläche lautet

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial t} + u_0 \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_1 + \Phi_\gamma)\,,$$

und wegen (1) wird daraus

$$g \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_1 + \Phi_\gamma) + u_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Phi_1 + \Phi_\gamma) + 2\, u_0 \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial t} (\Phi_1 + \Phi_\gamma) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Phi_1 + \Phi_\gamma) = 0\,, \quad (y = 0)\,. \tag{2}$$

Da die Anströmungswellenbewegung unabhängig von dem in der Flüssigkeit befindlichen Tragflügel der Relation (2) genügen muß, gilt auch für Φ_γ allein die Bedingung

$$g \frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial y} + u_0^2 \frac{\partial^2 \Phi_\gamma}{\partial x^2} + 2\, u_0 \frac{\partial^2 \Phi_\gamma}{\partial x\, \partial t} + \frac{\partial^2 \Phi_\gamma}{\partial t^2} = 0\,, \qquad (y = 0)\,. \tag{2'}$$

Die Wellenanströmung habe die Kreisfrequenz ω; wir setzen sie wie üblich als ebene Welle an mit dem Potential

$$\Phi_1 = B\, e^{\lambda y}\, e^{i(\omega t - \lambda x)} + \overline{B}\, e^{\lambda y}\, e^{-i(\omega t - \lambda x)}\,.$$

Die Bedingung (2), (2′) liefert dann zwei mögliche Wellenzahlen λ, nämlich

$$\lambda_1 = \frac{g}{u_0^2} \mu_1\,, \qquad \lambda_2 = \frac{g}{u_0^2} \mu_2\,, \qquad (\mu_1 > 0\,,\ \ \mu_2 > 0)\,,$$

wobei

$$\mu_1 = \Omega + \frac{1}{2} + \sqrt{\Omega + \frac{1}{4}}\,, \qquad \mu_2 = \Omega + \frac{1}{2} - \sqrt{\Omega + \frac{1}{4}} \qquad \text{mit} \qquad \Omega = \frac{\omega\, u_0}{g}\,. \tag{3}$$

ist. Damit erhalten wir die Wellenanströmung unseres Problemes in der Form

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 = {} & B_1\, e^{i\omega t}\, e^{\frac{g}{u_0^2}(y - i x)\mu_1} + \overline{B}_1\, e^{-i\omega t}\, e^{\frac{g}{u_0^2}(y + i x)\mu_1} \\ & + B_2\, e^{i\omega t}\, e^{\frac{g}{u_0^2}(y - i x)\mu_2} + \overline{B}_2\, e^{-i\omega t}\, e^{\frac{g}{u_0^2}(y + i x)\mu_2}\,, \\ u_1 = {} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\,, \qquad v_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\,, \qquad (u_1^2 \ll u_0^2\,, \quad v_1^2 \ll u_0^2)\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Wir kommen nun zu der Berechnung des Geschwindigkeitspotentials Φ_γ eines an der Stelle $(\xi, -h)$ liegenden Wirbels der Stärke $a\,\gamma(\xi, t)$. Wir setzen an:

$$\gamma(\xi, t) = \delta_0(\xi) + \delta_1(\xi)\, e^{i\omega t} + \overline{\delta_1(\xi)}\, e^{-i\omega t}\,, \tag{5}$$

$$\Phi_\gamma = \frac{\alpha\, \gamma}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda(h+y)} \sin \lambda(x - \xi)\, \frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{a\, \gamma}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda(h-y)} \sin \lambda(x - \xi)\, \frac{d\lambda}{\lambda} + \Phi_\gamma^* + \Phi_\gamma^{**}\,. \tag{6}$$

Die beiden ersten Glieder in (6) stellen das auch in der stationären Theorie auftretende Potential eines Wirbels in unendlich ausgedehnter Flüssigkeit und des an der Ebene $y = 0$ gespiegelten Wirbels dar. Das Zusatzpotential Φ_γ^* ist so zu bestimmen, daß es zusammen mit den beiden ersten

Gliedern der Relation (2′) genügt. Dieses führt nach elementarer Rechnung auf die Bedingungsgleichung

$$g\,\frac{\partial \Phi_\gamma^*}{\partial y}+u_0^2\,\frac{\partial^2 \Phi_\gamma^*}{\partial x^2}+2\,u_0\,\frac{\partial^2 \Phi_\gamma^*}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial^2 \Phi_\gamma^*}{\partial t^2}=a\,\gamma(\xi,t)\,\frac{g}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda h}\sin\lambda(x-\xi)\,d\lambda\,. \tag{7}$$

Der Zusatzanteil Φ_γ^{**} muß dann für sich der Gleichung (2′) genügen, und er ist weiter so zu bestimmen, daß

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial x}=0\,,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial y}=0\,,\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial t}\right)_{y=0}=0 \tag{8}$$

ist; denn der Wirbel übt ja weit voraus keinen Störungseinfluß mehr aus.

Der Ansatz

$$\begin{aligned}\Phi_\gamma^* &= e^{i\omega t}\int_0^\infty e^{\lambda y}\left(e^{i\lambda(x-\xi)}\,G_1(\lambda,\xi)+e^{-i\lambda(x-\xi)}\,G_2(\lambda,\xi)\right)d\lambda\\ &+e^{-i\omega t}\int_0^\infty e^{\lambda y}\left(e^{-i\lambda(x-\xi)}\,\overline{G_1(\lambda,\xi)}+e^{i\lambda(x-\xi)}\,\overline{G_2(\lambda,\xi)}\right)d\lambda+\int_0^\infty e^{\lambda y}\,G_0(\lambda,\xi)\sin\lambda(x-\xi)\,d\lambda\end{aligned}$$

liefert gemäß Gleichung (7) nach elementarer Rechnung

$$\begin{aligned}(u_0^2\lambda^2+2\,u_0\,\omega\,\lambda-g\,\lambda+\omega^2)\,G_1&=\frac{i}{2\pi}\,a\,g\,\delta_1(\xi)\,e^{-\lambda h}\,,\\ (u_0^2\lambda^2-2\,u_0\,\omega\,\lambda-g\,\lambda+\omega^2)\,G_2&=-\frac{i}{2\pi}\,a\,g\,\delta_1(\xi)\,e^{-\lambda h}\,,\\ (u_0^2\lambda^2-g\,\lambda)\,G_0&=-\frac{a\,g}{\pi}\,\delta_0(\xi)\,e^{-\lambda h}\,.\end{aligned}$$

Wir setzen noch $\lambda=\frac{g}{u_0^2}\,\mu$ und erhalten nach (5), (6) das gesuchte Wirbelpotential

$$\left.\begin{aligned}\Phi_\gamma=&\frac{a}{2\pi}\left(\delta_0(\xi)+\delta_1(\xi)\,e^{i\omega t}+\overline{\delta_1(\xi)}\,e^{-i\omega t}\right)\int_0^\infty\left(e^{-\lambda(h+y)}-e^{-\lambda(h-y)}\right)\sin\lambda(x-\xi)\,\frac{d\lambda}{\lambda}\\ &+\frac{i}{2\pi}\,a\,\delta_1(\xi)\,e^{i\omega t}\int_0^\infty\left[\frac{e^{-\mu\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\,e^{i\mu\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}}{\mu^2-\mu+2\,\mu\,\Omega+\Omega^2}-\frac{e^{-\mu\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\,e^{-i\mu\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}}{\mu^2-\mu-2\,\mu\,\Omega+\Omega^2}\right]d\mu\\ &-\frac{i}{2\pi}\,a\,\overline{\delta_1(\xi)}\,e^{-i\omega t}\int_0^\infty\left[\frac{e^{-\mu\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\,e^{-i\mu\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}}{\mu^2-\mu+2\,\mu\,\Omega+\Omega^2}-\frac{e^{-\mu\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\,e^{i\mu\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}}{\mu^2-\mu-2\,\mu\,\Omega+\Omega^2}\right]d\mu\\ &-\frac{1}{\pi}\,a\,\delta_0(\xi)\int_0^\infty e^{-\mu\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\sin\frac{g\,\mu}{u_0^2}(x-\xi)\,\frac{d\mu}{\mu(\mu-1)}-a\,\delta_0(\xi)\,e^{-\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\cos\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)\\ &-\frac{a}{2}\,\delta_1(\xi)\,e^{i\omega t}\,\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left(e^{-\mu_1\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\,e^{-i\mu_1\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}-e^{-\mu_2\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\,e^{-i\mu_2\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}\right)\\ &-\frac{a}{2}\,\overline{\delta_1(\xi)}\,e^{-i\omega t}\,\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left(e^{-\mu_1\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\,e^{i\mu_1\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}-e^{-\mu_2\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\,e^{+i\mu_2\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}\right).\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Um die Entwicklung der Theorie und ihre Übersichtlichkeit nicht durch Zwischenbetrachtungen zu beeinträchtigen, haben wir in Formel (9) gleich auch das Ergebnis für Φ_γ^{**} (das sind die Glieder ohne Integral) mit angegeben. Φ_γ^{**} genügt der Relation (2′); denn μ_1, μ_2 sind gemäß (3) Wurzeln der Gleichung $\mu^2-\mu-2\,\mu\,\Omega+\Omega^2=0$.

Damit erfüllt auch Φ_γ die Randbedingung (2′); Φ_γ genügt ferner der Bedingung (8) und hat somit alle geforderten Eigenschaften. Um das letztere zu erkennen, benötigt man einige wichtige Integralformeln, die auch in der ganzen weiteren Theorie eine entscheidende Rolle spielen, so daß

wir für sie neue Abkürzungen einführen wollen. Es gilt

$$I_1(x,y,\xi,\mu_1) \equiv \int_0^\infty e^{-\mu\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\, e^{-i\mu\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}\,\frac{d\mu}{\mu-\mu_1} = -\,e^{-\mu_1\frac{g}{u_0^2}(h-y)}$$

$$\times\left\{\left[C_i\left(\mu_1\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)\right)+i\,S_i\left(\mu_1\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)\right)\pm i\,\frac{\pi}{2}\right]e^{-i\mu_1\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}+\int_0^{\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(h-y)}\frac{\vartheta-i\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(x-\xi)}{\vartheta^2+\left[\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(x-\xi)\right]^2}\,e^{\vartheta}\,d\vartheta\right\} \tag{10}$$

$$= -\,e^{-\mu_1\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\,e^{-i\mu_1\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}\left\{0{,}5772+\ln\frac{\mu_1 g}{u_0^2}+\frac{1}{2}\ln\left[(x-\xi)^2+(h-y)^2\right]+i\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-\xi}{h-y}\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot n!}\left(\frac{\mu_1 g}{u_0^2}\right)^n\left[i\,x-i\,\xi+h-y\right]^n\right\},\qquad (+\text{ für } x>\xi,\quad -\text{für } x<\xi),$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} I_1(x,y,\xi,\mu_1) = \mp\, i\,\pi\, e^{-\mu_1\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\,e^{-i\mu_1\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)},$$

$$I_2(x,y,\xi) \equiv \int_0^\infty e^{-\mu\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\, e^{i\mu\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}\,\frac{d\mu}{\mu+\Omega} = -\,e^{\Omega\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\times$$

$$\times\left\{\left[C_i\left(\Omega\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)\right)+i\,S_i\left(\Omega\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)\right)\mp i\,\frac{\pi}{2}\right]e^{-i\Omega\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}+\int_0^{\frac{\Omega}{u_0^2}h-y)}\frac{\vartheta+i\frac{\Omega g}{u_0^2}(x-\xi)}{\vartheta^2+\left[\frac{\Omega g}{u_0^2}(x-\xi)\right]^2}e^{-\vartheta}\,d\vartheta\right\} \tag{11}$$

$$= -\,e^{\Omega\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\,e^{-i\Omega\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}\left\{0{,}5772+\ln\frac{\Omega g}{u_0^2}+\frac{1}{2}\ln\left[(x-\xi)^2+(h-y)^2\right]-i\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-\xi}{h-y}\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot n!}\left(\frac{\Omega g}{u_0^2}\right)^n\left[i\,x-i\,\xi-h+y\right]^n\right\},\qquad (-\text{für } x>\xi,\quad +\text{für } x<\xi),$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} I_2(x,y,\xi) = 0\,.$$

$$I_3(x,y,\xi) \equiv \int_0^\infty e^{-\mu\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\, e^{i\mu\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}\,\frac{d\mu}{\mu+\alpha+i\beta}$$

$$= -\,e^{\frac{g}{u_0^2}(\alpha+i\beta)(h-y-ix+i\xi)}\left\{0{,}5772+\frac{1}{2}\ln\frac{g^2}{u_0^4}(\alpha^2+\beta^2)+\frac{1}{2}\ln\left[(x-\xi)^2+(h-y)^2\right]\right. \tag{12}$$

$$\left.-i\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-\xi}{h-y}+i\,\mathrm{arctg}\,\frac{\beta}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot n!}\left[\frac{g}{u_0^2}(\alpha+i\beta)(i\,x-i\,\xi-h+y)\right]^n\right\},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} I_3(x,y,\xi) = 0\,,\qquad (\alpha\geqq 0,\quad \beta>0),$$

$$I_4(x,y,\xi) \equiv \int_0^\infty e^{-\mu\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\, e^{i\mu\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}\,\frac{d\mu}{\mu+\alpha-i\beta}$$

$$= -\,e^{\frac{g}{u_0^2}(\alpha-i\beta)(h-y-ix+i\xi)}\left\{0{,}5772+\frac{1}{2}\ln\frac{g^2}{u_0^4}(\alpha^2+\beta^2)+\frac{1}{2}\ln\left[(x-\xi)^2+(h-y)^2\right]\right. \tag{13}$$

$$\left.-i\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-\xi}{h-y}-i\,\mathrm{arctg}\,\frac{\beta}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot n!}\left[\frac{g}{u_0^2}(\alpha-i\beta)(i\,x-i\,\xi-h+y)\right]^n\right\}.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} I_4(x,y,\xi) = 0\,,\qquad (\alpha\geqq 0,\quad \beta>0).$$

Für den Beweis der Integralformeln (10), (11), (12), (13) wird auf Ziff. **10** verwiesen. Die Größen α und β sind in folgender Weise definiert:

$$\left.\begin{aligned} \mu^2 - \mu + 2\,\mu\,\Omega + \Omega^2 &= (\mu + \alpha - i\,\beta)\,(\mu + \alpha + i\,\beta)\,, \\ \alpha = \Omega - \frac{1}{2}\,, \qquad \beta &= \sqrt{\Omega - \frac{1}{4}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Wir beschränken uns dabei auf den Bereich $\Omega > 1/4$; dieser ist für die bei Tragflügelbooten vorliegenden hohen *Froude*schen Zahlen allein von Interesse.

Mit Hilfe der Integralformeln (10), (12), (13) ist es nicht schwer, zu zeigen, daß das Wirbelpotential (9) auch der Bedingung (8) genügt. Die zeitunabhängigen Glieder in (9) stimmen natürlich genau mit den bekannten Ausdrücken aus der stationären Theorie überein (vgl. Arbeit I, Ziff. 2).

3. Das Geschwindigkeitsfeld der gebundenen Wirbel. Mit dem Potential Φ_γ eines an der Stelle $(\xi, -h)$ liegenden Wirbels aus Formel (9) kann nun leicht das Geschwindigkeitsfeld u_γ, v_γ der gebundenen Wirbel des Unterwassertragflügels erhalten werden, und zwar ist

$$u_\gamma = \int_{-a}^{a} \frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial x}\,\frac{d\xi}{a}\,, \qquad v_\gamma = \int_{-a}^{a} \frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial y}\,\frac{d\xi}{a}\,.$$

Wir übergehen die elementare Zwischenrechnung und geben gleich das Ergebnis an:

$$\begin{aligned} u_\gamma(x,y,t) = {} & \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\left[\delta_0(\xi) + \delta_1(\xi)\,e^{i\omega t} + \overline{\delta_1(\xi)}\,e^{-i\omega t}\right]\left[\frac{y+h}{(x-\xi)^2+(y+h)^2} + \frac{y-h}{(x-\xi)^2+(y-h)^2}\right]d\xi \\ & - \frac{1}{2\pi}\,\frac{g}{u_0^2}\int_{-a}^{a}\delta_0(\xi)\left[I_1(x,y,\xi,1) + \overline{I_1(x,y,\xi,1)}\right]d\xi + \frac{g}{u_0^2}\,e^{-\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\int_{-a}^{a}\delta_0(\xi)\sin\frac{g}{u_0^2}\,(x-\xi)\,d\xi \\ & - \frac{1}{2\pi}\,\frac{g}{u_0^2}\,e^{i\omega t}\int_{-a}^{a}\delta_1(\xi)\left[\frac{1}{2}\left(1 - i\,\frac{\alpha}{\beta}\right)I_3(x,y,\xi) + \frac{1}{2}\left(1 + i\,\frac{\alpha}{\beta}\right)I_4(x,y,\xi) + \frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\,I_1(x,y,\xi,\mu_1)\right. \\ & \left. + \frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\,I_1(x,y,\xi,\mu_2)\right]d\xi - \frac{1}{2\pi}\,\frac{g}{u_0^2}\,e^{-i\omega t}\int_{-a}^{a}\overline{\delta_1(\xi)}\left[\frac{1}{2}\left(1 + i\,\frac{\alpha}{\beta}\right)\overline{I_3(x,y,\xi)}\right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\left(1 - i\,\frac{\alpha}{\beta}\right)\overline{I_4(x,y,\xi)} + \frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\,\overline{I_1(x,y,\xi,\mu_1)} + \frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\,\overline{I_1(x,y,\xi,\mu_2)}\right]d\xi \\ & + \frac{i}{2}\,\frac{g}{u_0^2}\,e^{i\omega t}\int_{-a}^{a}\delta_1(\xi)\left[\frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\,e^{-\mu_1\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\,e^{-i\mu_1\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)} + \frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\,e^{-\mu_2\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\,e^{-i\mu_2\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}\right]d\xi \\ & - \frac{i}{2}\,\frac{g}{u_0^2}\,e^{-i\omega t}\int_{-a}^{a}\overline{\delta_1(\xi)}\left[\frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\,e^{-\mu_1\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\,e^{i\mu_1\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)} + \frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\,e^{-\mu_2\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\,e^{i\mu_2\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}\right]d\xi\,, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} v_\gamma(x,y,t) = {} & -\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\left[\delta_0(\xi) + \delta_1(\xi)\,e^{i\omega t} + \overline{\delta_1(\xi)}\,e^{-i\omega t}\right]\left[\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y+h)^2} + \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-h)^2}\right]d\xi \\ & - \frac{i}{2\pi}\,\frac{g}{u_0^2}\int_{-a}^{a}\delta_0(\xi)\left[I_1(x,y,\xi,1) - \overline{I_1(x,y,\xi,1)}\right]d\xi - \frac{g}{u_0^2}\,e^{-\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\int_{-a}^{a}\delta_0(\xi)\cos\frac{g}{u_0^2}\,(x-\xi)\,d\xi \\ & + \frac{i}{2\pi}\,\frac{g}{u_0^2}\,e^{i\omega t}\int_{-a}^{a}\delta_1(\xi)\left[\frac{1}{2}\left(1 - i\,\frac{\alpha}{\beta}\right)I_3(x,y,\xi) + \frac{1}{2}\left(1 + i\,\frac{\alpha}{\beta}\right)I_4(x,y,\xi) - \frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\,I_1(x,y,\xi,\mu_1)\right. \\ & \left. - \frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\,I_1(x,y,\xi,\mu_2)\right]d\xi - \frac{i}{2\pi}\,\frac{g}{u_0^2}\,e^{-i\omega t}\int_{-a}^{a}\overline{\delta_1(\xi)}\left[\frac{1}{2}\left(1 + i\,\frac{\alpha}{\beta}\right)\overline{I_3(x,y,\xi)}\right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\left(1 - i\,\frac{\alpha}{\beta}\right)\overline{I_4(x,y,\xi)} - \frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\,\overline{I_1(x,y,\xi,\mu_1)} - \frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\,\overline{I_1(x,y,\xi,\mu_2)}\right]d\xi \end{aligned}$$

$$-\frac{g}{2\,u_0^2}\,e^{i\omega t}\int_{-a}^{a}\delta_1(\xi)\left[\frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\,e^{-\mu_1\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\,e^{-i\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)\mu_1}+\frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\,e^{-\mu_2\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\,e^{-i\mu_2\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}\right]d\xi$$

$$-\frac{g}{2\,u_0^2}\,e^{-i\omega t}\int_{-a}^{a}\overline{\delta_1(\xi)}\left[\frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\,e^{-\mu_1\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\,e^{i\mu_1\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}+\frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\,e^{-\mu_2\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\,e^{i\mu_2\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}\right]d\xi\,. \qquad (16)$$

4. Das Geschwindigkeitsfeld der freien Wirbel. Durch die zeitliche Änderung der gebundenen Wirbel werden freie Wirbel induziert, die mit der Anströmung u_0 hinter dem Unterwassertragflügel abfließen. Der kleine wellenförmige Anteil der Anströmung und die gegenseitige Beeinflussung der freien Wirbel wird dabei vernachlässigt. Ein an der Stelle $(\xi, -h)$ liegender gebundener Wirbel der Stärke $a\,\gamma(\xi, t)$ induziert eine kontinuierliche Folge von freien Wirbeln der Stärke

$$-a\frac{\partial}{\partial t}\,\gamma\left(\xi, t-\frac{X-\xi}{u_0}\right)dt=-i\,\frac{\omega\,a}{u_0}\left[\delta_1(\xi)\,e^{i\omega t}\,e^{-i\frac{\omega}{u_0}(X-\xi)}-\overline{\delta_1(\xi)}\,e^{-i\omega t}\,e^{i\frac{\omega}{u_0}(X-\xi)}\right]dX\,,$$

$$(\xi \leqq X<\infty)\,.$$

Wir wollen dabei annehmen, daß alle diese freien Wirbel den gleichen Abstand h von der Wasseroberfläche behalten; dieses ist natürlich nur in der Nähe der Tragfläche näherungsweise richtig. Da jedoch die in der Nähe der Tragfläche befindlichen freien Wirbel den größten Einfluß ausüben, erscheint es zulässig, die obige Annahme zu machen. Um das Geschwindigkeitsfeld bzw. das Potential dieser freien Wirbel zu berechnen, können wir von dem Geschwindigkeitspotential eines Wirbels nach Formel (9) ausgehen. Dabei ist natürlich sinngemäß $a\,\gamma(\xi, t)$ zu ersetzen durch

$$-i\,\frac{\omega\,a}{u_0}\left[\delta_1(\xi)\,e^{-i\frac{\omega}{u_0}(X-\xi)}\,e^{i\omega t}-\overline{\delta_1(\xi)}\,e^{i\frac{\omega}{u_0}(X-\xi)}\,e^{-i\omega t}\right]dX\,,$$

und außerdem ist über X von ξ bis ∞ zu integrieren. Hierfür benötigt man eine Reihe komplizierter Integrale, für die wir teilweise wieder neue Abkürzungen einführen. Es ist

$$\left.\begin{aligned}
I_5(x,h,\xi)\equiv\int_{\xi}^{\infty}e^{-i\frac{\omega}{u_0}(X-\xi)}\,\frac{h\,dX}{(x-X)^2+h^2}&=\frac{1}{2}\,e^{-i\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)}\left[\pi\,e^{-\frac{\omega h}{u_0}}+i\,e^{\frac{\omega h}{u_0}}\,E_i\left(-\frac{\omega h}{u_0}\right)\right.\\
&\left.-i\,e^{-\frac{\omega h}{u_0}}\,E_i^{*}\left(\frac{\omega h}{u_0}\right)+2\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\omega h}{u_0}\,\operatorname{arctg}\frac{x-\xi}{h}+i\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\omega h}{u_0}\,\ln\left(1+\frac{(x-\xi)^2}{h^2}\right)\right]\\
&-\frac{i}{2}\,e^{-i\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)}\,e^{-\frac{\omega h}{u_0}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot n!}\left(\frac{\omega}{u_0}\right)^n\left[(h+i\,x-i\,\xi)^n-h^n\right]\\
&+\frac{i}{2}\,e^{-i\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)}\,e^{\frac{\omega h}{u_0}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot n!}\left(\frac{\omega}{u_0}\right)^n\left[(-h+i\,x-i\,\xi)^n-(-h)^n\right],\\
I_5(x,0,\xi)&=0\,,\\
\lim_{x\to\infty}I_5(x,h,\xi)&=\pi\,e^{-\frac{\omega h}{u_0}}\,e^{-i\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)}\,,\qquad \lim_{x\to-\infty}I_5(x,h,\xi)=0\,,
\end{aligned}\right\}\qquad (17)$$

$$\left.\begin{aligned}
I_6(x,h,\xi)\equiv\int_{\xi}^{\infty}e^{-i\frac{\omega}{u_0}(X-\xi)}\,\frac{(x-X)\,dX}{(x-X)^2+h^2}&=\frac{1}{2}\,e^{-i\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)}\left[i\,\pi\,e^{-\frac{\omega h}{u_0}}+e^{\frac{\omega h}{u_0}}\,E_i\left(-\frac{\omega h}{u_0}\right)\right.\\
&\left.+e^{-\frac{\omega h}{u_0}}\,E_i^{*}\left(\frac{\omega h}{u_0}\right)-2\,i\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\omega h}{u_0}\,\operatorname{arctg}\frac{x-\xi}{h}+\mathfrak{Cof}\,\frac{\omega h}{u_0}\,\ln\left(1+\frac{(x-\xi)^2}{h^2}\right)\right]\\
&+\frac{1}{2}\,e^{-i\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)}\,e^{-\frac{\omega h}{u_0}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot n!}\left(\frac{\omega}{u_0}\right)^n\left[(h+i\,x-i\,\xi)^n-h^n\right]\\
&+\frac{1}{2}\,e^{-i\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)}\,e^{\frac{\omega h}{u_0}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot n!}\left(\frac{\omega}{u_0}\right)^n\left[(-h+i\,x-i\,\xi)^n-(-h)^n\right],\\
\lim_{x\to\infty}I_6(x,h,\xi)&=i\,\pi\,e^{-\frac{\omega h}{u_0}}\,e^{-i\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)}\,,\qquad \lim_{x\to-\infty}I_6(x,h,\xi)=0\,,
\end{aligned}\right\}\qquad (18)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
I_7(x,h,\xi,\mu_1) &\equiv \mu_1 \int_{\xi}^{\infty} e^{-i\frac{\omega}{u_0}(X-\xi)} \frac{g}{u_0^2}\,dX \times \\
&\times \left\{ e^{-i\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(x-X)} \left[C_i\left(\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(x-X)\right) + i\,S_i\left(\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(x-X)\right) + i\frac{\pi}{2}\right] + \int_0^{\mu_1\frac{g\,h}{u_0^2}} \frac{\vartheta - i\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(x-X)}{\vartheta^2 + \left|\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(x-X)\right|^2} e^{\vartheta}\,d\vartheta \right\} \\
&= \frac{i\,\mu_1}{\mu_1-\Omega} e^{-i\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(x-\xi)} \left[C_i\left(\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(x-\xi)\right) + i\,S_i\left(\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(x-\xi)\right) + i\frac{\pi}{2}\right] \\
&- \frac{i\,\mu_1}{\mu_1-\Omega} e^{-i\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)} \left[C_i\left(\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)\right) + i\,S_i\left(\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)\right) + i\frac{\pi}{2}\right] \\
&+ \frac{\mu_1}{\mu_1-\Omega} e^{-i\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)} \left[\pi\, e^{\frac{g\,h}{u_0^2}(\mu_1-\Omega)} - \pi - i\, e^{\frac{g\,h}{u_0^2}(\mu_1-\Omega)} E_i^*\left(\Omega\frac{g\,h}{u_0^2}\right) + i\,E_i^*\left(\mu_1\frac{g\,h}{u_0^2}\right)\right] \\
&+ e^{-i\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)} \int_0^{\mu_1\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)} e^{-i\left(1-\frac{\Omega}{\mu_1}\right)\tau} \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{\mu_1 g\,h}{u_0^2}\right)^2\frac{1}{\tau^2}\right) - i\,\operatorname{arctg}\left(\mu_1\frac{g\,h}{u_0^2}\frac{1}{\tau}\right) \right. \\
&\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot n!}\left[\left(\mu_1\frac{g\,h}{u_0^2}+i\,\tau\right)^n - (i\,\tau)^n\right]\right] d\tau\,, \\
&\lim_{x\to\infty} I_7(x,h,\xi,\mu_1) = \frac{\pi\,\mu_1}{\mu_1-\Omega}\left(2\,e^{-i\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)\,\frac{g\,h}{u_0^2}(\mu_1-\Omega)} - e^{-i\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)} - e^{-i\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(x-\xi)}\right), \\
&\lim_{x\to-\infty} I_7(x,h,\xi,\mu_1) = 0\,,
\end{aligned}
\right\} \tag{19}
$$

$$
\int_{\xi}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-i\frac{\omega}{u_0}(X-\xi)}\; e^{-\mu\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\; e^{i\mu\frac{g}{u_0^2}(x-X)}}{\mu^2-\mu+2\,\mu\,\Omega+\Omega^2}\,\mu\,d\mu\,\frac{g}{u_0^2}\,dX
= -\frac{\alpha+i\,\beta-\Omega}{2\,\beta}\,I_3(x,y,\xi) + \frac{\alpha-i\,\beta-\Omega}{2\,\beta}\,I_4(x,y,\xi) + i\,I_2(x,y,\xi)\,, \tag{20}
$$

$$
\int_{\xi}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-i\frac{\omega}{u_0}(X-\xi)}\; e^{-\mu\frac{g}{u_0^2}(h-y)}\; e^{i\mu\frac{g}{u_0^2}(x-X)}}{\mu^2-\mu+2\,\mu\,\Omega+\Omega^2}\,d\mu\,\frac{g}{u_0^2}\,dX
= \frac{\alpha+i\,\beta-\Omega+1}{2\,\beta\,\Omega}\,I_3(x,y,\xi) - \frac{\alpha-i\,\beta-\Omega+1}{2\,\beta\,\Omega}\,I_4(x,y,\xi) - \frac{i}{\Omega}\,I_2(x,y,\xi)\,. \tag{21}
$$

Für den Beweis der Integralformeln (17) bis (21) wird auf Ziff. **10** verwiesen.[1]

Mit Hilfe dieser und der früheren Integralformeln (10) bis (13) erhält man nach einigen leicht nachzurechnenden Umformungen das Geschwindigkeitsfeld der freien Wirbel:

$$
u_f(x,y,t) = \frac{i}{2\,\pi}\,\frac{\omega}{u_0}\,e^{i\,\omega\,t}\int_{-a}^{a}\delta_1(\xi)\,\{\cdots\}\,d\xi - \frac{i}{2\,\pi}\,\frac{\omega}{u_0}\,e^{-i\,\omega\,t}\int_{-a}^{a}\overline{\delta_1(\xi)}\;\overline{\{\cdots\}}\,d\xi
$$

[1] Das in Formel (19) noch auftretende Integral muß numerisch ausgewertet werden. Dabei kann der für $\tau = 0$ logarithmisch singuläre Anteil des Integranden etwa in dem Bereich $0 \leqq \tau \leqq 0,02$ direkt integriert werden.

mit

$$\left.\begin{aligned}
\{\cdots\} &= I_5(x, h-y, \xi) - I_5(x, h+y, \xi) - \frac{\alpha + i\beta - \Omega}{2\beta} I_3(x, y, \xi) + \frac{\alpha - i\beta - \Omega}{2\beta} I_4(x, y, \xi) \\
&+ i\, I_2(x, y, \xi) - \frac{e^{-\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(h-y)}}{\mu_1 - \mu_2} I_7(x, h-y, \xi, \mu_1) - \frac{e^{-\frac{\mu_2 g}{u_0^2}(h-y)}}{\mu_2 - \mu_1} I_7(x, h-y, \xi, \mu_2) \\
&+ \left[\begin{array}{ll} \dfrac{-\pi\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(h-y)} \dfrac{1}{\mu_1 - \Omega} \left(e^{-i\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)} - e^{-i\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(x-\xi)}\right) & (\text{für } x > \xi)\,, \\ 0 & (\text{für } x < \xi)\,, \end{array}\right] \\
&+ \left[\begin{array}{ll} \dfrac{-\pi\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} e^{-\frac{\mu_2 g}{u_0^2}(h-y)} \dfrac{1}{\mu_2 - \Omega} \left(e^{-i\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)} - e^{-i\frac{\mu_2 g}{u_0^2}(x-\xi)}\right) & \text{für } x > \xi)\,, \\ 0 & (\text{für } x < \xi)\,, \end{array}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

$$\left.\begin{aligned}
v_f(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{u_0} e^{i\omega t} \int_{-a}^{a} \delta_1(\xi) \{\cdots\}\, d\xi + \frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{u_0} e^{-i\omega t} \int_{-a}^{a} \overline{\delta_1(\xi)}\ \overline{\{\cdots\}}\, d\xi \\
&\text{mit} \\
\{\cdots\} &= i\, I_6(x, h-y, \xi) + i\, I_6(x, h+y, \xi) - \frac{\alpha + i\beta - \Omega}{2\beta} I_3(x, y, \xi) + \frac{\alpha - i\beta - \Omega}{2\beta} I_4(x, y, \xi) \\
&+ i\, I_2(x, y, \xi) + \frac{e^{-\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(h-y)}}{\mu_1 - \mu_2} I_7(x, h-y, \xi, \mu_1) + \frac{e^{-\frac{\mu_2 g}{u_0^2}(h-y)}}{\mu_2 - \mu_1} I_7(x, h-y, \xi, \mu_2) \\
&+ \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\pi\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(h-y)} \dfrac{1}{\mu_1 - \Omega} \left(e^{-i\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)} - e^{-i\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(x-\xi)}\right) & (\text{für } x > \xi)\,, \\ 0 & (\text{für } x < \xi)\,, \end{array}\right] \\
&+ \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\pi\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} e^{-\frac{\mu_2 g}{u_0^2}(h-y)} \dfrac{1}{\mu_2 - \Omega} \left(e^{-i\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)} - e^{-i\frac{\mu_2 g}{u_0^2}(x-\xi)}\right) & (\text{für } x > \xi)\,, \\ 0 & (\text{für } x < \xi)\,. \end{array}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

5. Randbedingung am Flügel und Aufstellung der Integralgleichung. Wie üblich wird die Zirkulationsverteilung $\gamma(\xi, t)$ aus der Randbedingung am Flügel bestimmt; diese besagt, daß die Strömung relativ zum Flügelprofil tangential verlaufen muß. Nun ist zu beachten, daß durch die wellenförmige Anströmung eine Änderung der Auftriebskraft und damit eine Tauchbewegung des Unterwassertragflügels bewirkt wird. Dadurch fährt der Flügel nicht mehr in der konstanten Tiefe $y = -h$, sondern es gilt $y = \eta(t)$. Da eine solche Tauchbewegung ein stabiler Schwingungsvorgang ist, und da ferner die Amplituden der wellenförmigen Anströmung klein sind nach Voraussetzung (s. Ziff. 2), wollen wir in unseren Formeln doch weiter eine konstante Tauchtiefe annehmen: $\eta \approx -h$, mit $-h$ als zeitlichem Mittelwert von η. Dagegen muß die Tauchgeschwindigkeit $d\eta/dt$ auf jeden Fall in der Randbedingung am Flügel berücksichtigt werden[1]. Der zeitliche Mittelwert der Auftriebskraft K_y hält gerade der der Schwerkraft der Masse oberhalb des Flügels das Gleichgewicht, wenn wir annehmen, daß das Boot ausgetaucht ist, und der Flügel keine nennenswerte Masse hat. Wenn man von Dämpfungseinflüssen des Wassers und anderen Störungen absieht, ergibt sich dann durch die instationäre Anströmung im einfachsten Fall eine Tauchbewegung der Form

$$M \frac{d^2\eta}{dt^2} = -M g + K_y(t)\,.$$

Für die hier durchgeführte Näherungsbetrachtung ist es ausreichend, zu setzen

$$K_y(t) \approx \varrho\, u_0\, \Gamma(t) = \varrho\, u_0\, \Delta_0 + \varrho\, u_0\, \Delta_1\, e^{i\omega t} + \varrho\, u_0\, \overline{\Delta_1}\, e^{-i\omega t}$$

mit

$$\Delta_0 = \int_{-a}^{a} \delta_0(\xi)\, d\xi\,, \qquad \Delta_1 = \int_{-a}^{a} \delta_1(\xi)\, d\xi\,. \quad (24)$$

[1] Es sei denn, man beschränkt sich auf die Untersuchung von Flügeln, die etwa in einem Prüfstand fest montiert sind. Dieser Fall ist in der hier entwickelten Theorie mit enthalten; man braucht nur die Tauchgeschwindigkeit wegzulassen.

Mit $M g = \varrho u_0 \Delta_0$ und unter Berücksichtigung der Periodizitätsbedingung

$$\eta(t) = \eta\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right), \qquad \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \eta(t)\, dt = -h$$

liefert die Integration der Bewegungsgleichung

$$\left.\begin{aligned} \eta(t) &= -h - \frac{g}{\omega^2}\frac{\Delta_1}{\Delta_0} e^{i\omega t} - \frac{g}{\omega^2}\frac{\overline{\Delta_1}}{\Delta_0} e^{-i\omega t} \approx -h\,, \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{g i}{\omega}\frac{\Delta_1}{\Delta_0} e^{i\omega t} + \frac{g i}{\omega}\frac{\overline{\Delta_1}}{\Delta_0} e^{-i\omega t}\,. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Ist $f(x)$ die Profilskelettlinie des Unterwassertragflügels, so lautet die Randbedingung

$$f'(x) = \frac{v_1(x,-h,t) + v_\gamma(x,-h,t) + v_f(x,-h,t) - \frac{d\eta}{dt}}{u_1(x,-h,t) + u_\gamma(x,-h,t) + u_f(x,-h,t) + u_0}.$$

Durch Einsetzen von u_γ, v_γ, u_f, v_f, u_1, v_1, $d\eta/dt$ gemäß (4), (15), (16), (22), (23), (25) ergeben sich durch Koeffizientenvergleich in 1, $e^{i\omega t}$ zwei Integralgleichungen für die Zirkulationsfunktionen $\delta_0(\xi)$ und $\delta_1(\xi)$. Auf die dritte Gleichung für $\overline{\delta_1}$ kann dabei verzichtet werden; denn mit δ_1 ist ja auch $\overline{\delta_1}$ bekannt. Bedenkt man noch, daß $I_6(x, o, \xi)$ für $x = \xi$ singulär wird wie $\ln|x-\xi|$ (Integralcosinus), so nehmen die beiden Integralgleichungen folgende Form an:

$$-2u_0 f'(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \delta_0(\xi)\left\{\frac{1}{x-\xi} + K(x,\xi)\right\} d\xi \qquad \left(-a \leqq \begin{matrix} x \\ \xi \end{matrix} \leqq a\right), \tag{26}$$

$$+2\mu_1\frac{g}{u_0^2} B_1\left(1 + i f'(x)\right) e^{-\mu_1\frac{g h}{u_0^2}} e^{-i\mu_1\frac{g x}{u_0^2}} + 2\mu_2\frac{g}{u_0^2} B_2\left(1 + i f'(x)\right) e^{-\mu_2\frac{g h}{u_0^2}} e^{-i\mu_2\frac{g x}{u_0^2}} + 2i\frac{g}{\omega}\frac{\Delta_1}{\Delta_0} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \delta_1(\xi)\left\{\frac{1}{x-\xi} + k(x,\xi) - \frac{i\omega}{u_0}\ln\left|\frac{x}{a} - \frac{\xi}{a}\right|\right\} d\xi \qquad \left(-a \leqq \begin{matrix} x \\ \xi \end{matrix} \leqq a\right). \tag{27}$$

Die Funktionen $K(x,\xi)$ und $k(x,\xi)$ sind im ganzen Bereich in beiden Variablen stetig; es zeigt sich, daß die Integralgleichung (26) genau mit der Gleichung (I, 12) der stationären Theorie übereinstimmt. Denn

$$K(x,\xi) = \frac{x-\xi-2h f'(x)}{(x-\xi)^2+4h^2} + 2\pi\frac{g}{u_0^2} f'(x)\, e^{-\frac{2hg}{u_0^2}} \sin\frac{g}{u_0^2}(x-\xi) + 2\pi\frac{g}{u_0^2} e^{-\frac{2hg}{u_0^2}} \cos\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)$$
$$-\frac{g}{u_0^2}\left(f'(x) - i\right) I_1(x,-h,\xi,1) - \frac{g}{u_0^2}\left(f'(x) + i\right)\overline{I_1(x,-h,\xi,1)} \tag{28}$$

ist genau mit dem Ausdrucke (I, 13) identisch.

Der Kernanteil $k(x,\xi)$ wird leider sehr umfangreich:

$$k(x,\xi) = \frac{x-\xi-2h f'(x)}{(x-\xi)^2+4h^2} - \frac{1}{2}\frac{g}{u_0^2}\left(i + f'(x)\right)\left[\left(1 - i\frac{\alpha}{\beta}\right) I_3(x,-h,\xi) + \left(1 + i\frac{\alpha}{\beta}\right) I_4(x,-h,\xi)\right]$$
$$+\frac{g}{u_0^2}\left(i - f'(x)\right)\left[\frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2} I_1(x,-h,\xi,\mu_1) + \frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1} I_1(x,-h,\xi,\mu_2)\right]$$
$$-i\frac{g}{u_0^2}\left(i - f'(x)\right)\left[\frac{\pi\mu_1}{\mu_1-\mu_2} e^{-\mu_1\frac{2hg}{u_0^2}} e^{-i\mu_1\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)} + \frac{\pi\mu_2}{\mu_2-\mu_1} e^{-\mu_2\frac{2hg}{u_0^2}} e^{-i\mu_2\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)}\right]$$
$$+\frac{\omega}{u_0}\left(1 - i f'(x)\right)\left[\frac{\alpha+i\beta-\Omega}{2\beta} I_3(x,-h,\xi) - \frac{\alpha-i\beta-\Omega}{2\beta} I_4(x,-h,\xi) - i\, I_2(x,-h,\xi)\right]$$
$$-\frac{\omega}{u_0}\left(1 + i f'(x)\right)\left[\frac{e^{-\mu_1\frac{2hg}{u_0^2}}}{\mu_1-\mu_2} I_7(x,2h,\xi,\mu_1) + \frac{e^{-\mu_2\frac{2hg}{u_0^2}}}{\mu_2-\mu_1} I_7(x,2h,\xi,\mu_2)\right]$$
$$+i\frac{\omega}{u_0}\left[f'(x)\, I_5(x,2h,\xi) - I_6(x,2h,\xi) - I_6(x,0,\xi) + \ln\left|\frac{x}{a} - \frac{\xi}{a}\right|\right]$$

$$-\frac{\omega}{u_0}\left(1+i\,f'(x)\right)\left[\begin{array}{ll}\dfrac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\,e^{-\mu_1\frac{2hg}{u_0^2}}\,\dfrac{\pi}{\mu_1-\Omega}\left(e^{-i\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)}-e^{-i\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(x-\xi)}\right) & (\text{für } x>\xi)\,,\\ 0 & (\text{für } x<\xi)\,,\end{array}\right]$$

$$-\frac{\omega}{u_0}\left(1+i\,f'(x)\right)\left[\begin{array}{ll}\dfrac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\,e^{-\mu_2\frac{2hg}{u_0^2}}\,\dfrac{\pi}{\mu_2-\Omega}\left(e^{-i\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)}-e^{-i\frac{\mu_2 g}{u_0^2}(x-\xi)}\right) & (\text{für } x>\xi)\\ 0 & (\text{für } x<\xi)\end{array}\right]. \tag{29}$$

6. Lösung der Integralgleichung. Wir werden hier nur die Auflösung der etwas komplizierteren Integralgleichung (27) behandeln. Denn die Auflösung der Integralgleichung (26) bzw. (I, 12) wurde bereits in Arbeit I durchgeführt und stellt außerdem im Prinzip nur einen Sonderfall der Lösung von (27) dar. Da zunächst also die Gleichung (26) als gelöst angesehen werden kann, ist auch die Gesamtzirkulation A_0 (24) aus der Abflußbedingung an der Profilhinterkante bekannt. Wir setzen nun

$$x=-a\cos s\,,\qquad \xi=-a\cos\sigma\,,\qquad \delta_1(\xi)=\frac{1}{\sin\sigma}\,P(\sigma)\qquad \left(0\leqq\frac{s}{\sigma}\leqq\pi\right). \tag{30}$$

Mit Hilfe einer harmonischen Analyse mit der Schrittweite $\pi/6$ stellen wir die stetigen Funktionen durch Fourierpolynome dar:

$$2\sin s\left(1+i\,f'(x)\right)\frac{g}{u_0^2}\left[B_1\mu_1\,e^{-\mu_1\frac{gh}{u_0^2}}\,e^{-i\mu_1\frac{gx}{u_0^2}}+B_2\mu_2\,e^{-\mu_2\frac{gh}{u_0^2}}\,e^{-i\mu_2\frac{gx}{u_0^2}}\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{\lambda=1}^{5}F_\lambda\sin\lambda s\,, \tag{31}$$

$$a\sin s\cdot k(s,\sigma)=\sum_{\lambda=1}^{5}\sum_{\nu=0}^{6}b_{\lambda\nu}\sin\lambda s\cos\nu\sigma\,. \tag{32}$$

Für die Berechnung der Fourierkoeffizienten $b_{\lambda\nu}$ vergleiche man Formel (I, 18). Damit geht (27) in die Form über

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{\lambda=1}^{5}F_\lambda\sin\lambda s+2\,i\,\frac{g}{\omega}\,\frac{A_1}{A_0}\sin s$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}P(\sigma)\left(\frac{\sin s}{\cos\sigma-\cos s}+\sum_{\lambda=1}^{5}\sum_{\nu=0}^{6}b_{\lambda\nu}\sin\lambda s\cos\nu\sigma-i\,\frac{\omega a}{u_0}\sin s\ln|\cos s-\cos\sigma|\right)d\sigma\,. \tag{33}$$

Für die Behandlung der Integralgleichung (33) ziehen wir die bekannte Darstellung[1]

$$\ln|\cos s-\cos\sigma|=-\ln 2-2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\cos\nu s\cos\nu\sigma \tag{34}$$

heran und machen den Lösungsansatz

$$P(\sigma)=\frac{P_0}{\sqrt{\pi}}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{\nu=1}^{M}P_\nu\cos\nu\sigma\qquad\text{mit}\qquad P_0=\frac{A_1}{a\sqrt{\pi}}. \tag{35}$$

Damit ergibt sich zur Bestimmung der Lösungskoeffizienten $P_\nu(\nu=1,\ldots M)$ das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
&P_1+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{6}b_{1\nu}P_\nu-i\,\frac{\omega a}{u_0}\,\frac{1}{4}\,P_2=F_1+\sqrt{2\pi}\,i\,\frac{g}{\omega}\,\frac{A_1}{A_0}-\frac{A_1}{a\sqrt{2\pi}}\left(b_{10}+i\,\frac{\omega a}{u_0}\ln 2\right),\\
&P_2+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{6}b_{2\nu}P_\nu+i\,\frac{\omega a}{2u_0}\left(P_1-\frac{P_3}{3}\right)=F_2-\frac{A_1}{a\sqrt{2\pi}}\,b_{20}\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&P_5+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{6}b_{5\nu}P_\nu+i\,\frac{\omega a}{2u_0}\left(\frac{P_4}{4}-\frac{P_6}{6}\right)=F_5-\frac{A_1}{a\sqrt{2\pi}}\,b_{50}\,,\\
&P_6+i\,\frac{\omega a}{2u_0}\left(\frac{P_5}{5}-\frac{P_7}{7}\right)=0\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

In allen praktischen Beispielen dürfte es ausreichend genau sein, bereits $P_7=0$ zu setzen, also $M=6$, so daß sich das an sich unendliche Gleichungssystem (36) auf ein System von sechs Gleichungen für die sechs Koeffizienten P_ν reduziert. Fast immer wird $\omega a/u_0<1$ sein. Die Gesamtzirku-

[1] *W. Schmeidler*, Integralgleichungen S. 67. Leipzig 1950.

lation A_1 wird wie üblich aus der Abflußbedingung an der Profilhinterkante bestimmt, d. h. aus der Gleichung $P(\pi) = 0$. Damit ist die Integralgleichung (27) bzw. (33) gelöst.

7. Berechnung der Flügelkräfte. Die momentanen resultierenden Flügelkräfte in x- und y-Richtung K_x und K_y werden prinzipiell genau wie in Arbeit I, Ziff. 5 nach dem Kutta-Joukowskischen Satz berechnet. Dazu denken wir uns den Flügel durch einen im Druckmittelpunkt (d. h. etwa im 1/4-Punkt) liegenden Punktwirbel gleicher Gesamtzirkulation ersetzt:

$$\Gamma(t) = \int_{-a}^{a} \gamma(\xi, t)\, d\xi\,.$$

Dann wird mit der Wasserdichte ϱ

$$\left.\begin{aligned} K_y &= \varrho \left[u_0 + u_1\left(-\frac{a}{2}, -h, t\right) + u_\gamma^*\left(-\frac{a}{2}, -h, t\right) + u_f\left(-\frac{a}{2}, -h, t\right)\right] \Gamma(t)\,, \\ K_x &= -\varrho \left[-\frac{d\eta}{dt} + v_1\left(-\frac{a}{2}, -h, t\right) + v_\gamma^*\left(-\frac{a}{2}, -h, t\right) + v_f\left(-\frac{a}{2}, -h, t\right)\right] \Gamma(t)\,. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten $u_\gamma^*\left(-\frac{a}{2}, -h, t\right)$, $v_\gamma^*\left(-\frac{a}{2}, -h, t\right)$ sind aus den allgemeinen Ausdrücken (15), (16) ohne weiteres zu bilden, indem statt der Wirbeldichte $\gamma(\xi, t)$ ein bei $\xi = -a/2$ gelegener Punktwirbel $\Gamma(t)$ angesetzt wird. Der Stern bedeutet, daß natürlich die vom gebundenen Wirbel selbst stammenden Anteile wegzulassen sind.

Die Berechnung von $u_f\left(-\frac{a}{2}, -h, t\right)$ nach (22) macht ebenfalls keinerlei Schwierigkeiten, nur bei der Bildung von $v_f\left(-\frac{a}{2}, -h, t\right)$ nach (23) bedarf der von dem Glied $I_6\left(-\frac{a}{2}, 0, -\frac{a}{2}\right)$ stammende Anteil einer besonderen Beachtung. Wir haben zu untersuchen, welcher Wert physikalisch sinngemäß für den formal unendlich werdenden Grenzwert $\lim\limits_{x \to -a/2} I_6\left(x, 0, -\frac{a}{2}\right)$ einzusetzen ist. Da

$$I_6\left(x, 0, -\frac{a}{2}\right) = e^{-i\frac{\omega}{u_0}\left(x + \frac{a}{2}\right)}\left[C_i\left(\frac{\omega}{u_0}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) + i\,\frac{\pi}{2} + i\,S_i\left(\frac{\omega}{u_0}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right)\right]$$

ist, wird

$$\lim_{x \to -a/2} I_6\left(x, 0, -\frac{a}{2}\right) = i\,\frac{\pi}{2} + 0{,}5772 + \ln\frac{\omega\, a}{u_0} + \lim_{x \to -a/2} \ln\left|\frac{1}{2} + \frac{x}{a}\right|.$$

Dieser unendliche Grenzwert beruht darauf, daß wir bei der Kraftberechnung von der Wirbeldichte zum Punktwirbel übergegangen sind, d. h. wir haben den eigentlichen Ausdruck

$$\int_{-a}^{a} \gamma(x, t)\, v_f(x, -h, t)\, dx$$

ersetzt durch

$$v_f\left(-\frac{a}{2}, -h, t\right) \Gamma(t)\,.$$

Dieses ist ja bei stetigen Geschwindigkeitsanteilen eine gut brauchbare Näherung. Es liegt daher nahe, für den singulären Anteil zu schreiben

$$\lim_{x \to -a/2} \ln\left|\frac{1}{2} + \frac{x}{a}\right| = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_{-a}^{a} \gamma(x, t) \ln\left|\frac{1}{2} + \frac{x}{a}\right| dx\,.$$

Dabei ist es für diese Näherungsbetrachtung möglich,

$$\gamma(x, t) = \frac{\Gamma(t)}{a\,\pi} \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}$$

zu setzen, d. h. nur den ersten *Birnbaum*schen Anteil zu nehmen. Dann wird wegen (34)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -a/2} \ln\left|\frac{1}{2} + \frac{x}{a}\right| &= \frac{1}{a\,\pi} \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a - x}{a + x}} \ln\left|\frac{1}{2} + \frac{x}{a}\right| dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (1 + \cos s) \ln\left|\frac{1}{2} - \cos s\right| ds = -\frac{1}{2} - \ln 2\,. \end{aligned}$$

Damit wird der für die Kraftberechnung gesuchte Wert

$$I_6\left(-\frac{a}{2}, 0, -\frac{a}{2}\right) = i\,\frac{\pi}{2} + 0{,}0772 + \ln\frac{\omega\, a}{2\, u_0}\,.$$

8. Die 1/4–3/4-Punkt-Methode. Um ohne die Auflösung der Integralgleichung näherungsweise die Gesamtzirkulation Γ des Flügels zu bestimmen, hat sich in der stationären Theorie des Unterwassertragflügels (Arbeit I) die bekannte 1/4—3/4-Punkt-Methode gut bewährt. Es liegt daher nahe, sie auch bei dem vorliegenden instationären Problem anzuwenden, um bei Näherungsrechnungen die Auflösung der Integralgleichung zu umgehen. Die beiden Bestimmungsgleichungen für Δ_0 und Δ_1 ergeben sich unmittelbar aus (26) und (27); sie lauten

$$\left.\begin{aligned} &-2\pi u_0 f'\left(\frac{a}{2}\right) = \Delta_0\left[\frac{1}{a} + K\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)\right], \\ &2\pi\mu_1\frac{g}{u_0^2}\,B_1\left(1 + i f'\left(\frac{a}{2}\right)\right) e^{-\mu_1\frac{g\,h}{u_0^2}}\, e^{-i\mu_1\frac{g\,a}{2\,u_0^2}} + 2\pi\mu_2\frac{g}{u_0^2}\,B_2\left(1 + i f'\left(\frac{a}{2}\right)\right) e^{-\mu_2\frac{g\,h}{u_0^2}}\, e^{-i\mu_2\frac{g\,a}{2\,u_0^2}} \\ &\qquad + 2\pi i\,\frac{g}{\omega}\,\frac{\Delta_1}{\Delta_0} = \Delta_1\left[\frac{1}{a} + k\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

9. Die Form der Wasseroberfläche. Zur Berechnung der Form $Y(x, t)$ der freien Wasseroberfläche dient Gleichung (1), die wir genauer in der Form schreiben

$$Y(x,t) = -\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_\gamma}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_f}{\partial t}\right)_{y=0} - \frac{u_0}{g}\left[u_1(x,0,t) + u_\gamma(x,0,t) + u_f(x,0,t)\right]. \tag{1}$$

Dabei kann der Unterwassertragflügel durch einen in seinem 1/4-Punkt angebrachten Punktwirbel gleicher Gesamtzirkulation ersetzt werden. Aus Arbeit I ist bekannt, daß dieses Verfahren praktisch ausreichend genau ist.

Der Ausdruck $\partial\Phi_f/dt$ in (1) bezieht sich auf die freien Wirbel. Unter Benutzung unserer Ergebnisse für Φ_γ, u_γ, u_f gemäß (9), (15), (22) erhält man nach einigen elementaren Zwischenrechnungen

$$\left.\begin{aligned} Y(x,t) = {}& \frac{i}{u_0}\, e^{i\omega t}\left[(\mu_1 - \Omega)\, B_1\, e^{-i\mu_1\frac{g\,x}{u_0^2}} + (\mu_2 - \Omega)\, B_2\, e^{-i\mu_2\frac{g\,x}{u_0^2}}\right] \\ & - \frac{i}{u_0}\, e^{-i\omega t}\left[(\mu_1 - \Omega)\,\overline{B}_1\, e^{i\mu_1\frac{g\,x}{u_0^2}} + (\mu_2 - \Omega)\,\overline{B}_2\, e^{i\mu_2\frac{g\,x}{u_0^2}}\right] \\ & + \frac{1}{2\pi}\,\frac{\Delta_0}{u_0}\left[I_1\left(x, 0, -\frac{a}{2}, 1\right) + \overline{I_1\left(x, 0, -\frac{a}{2}, 1\right)} - 2\pi\, e^{-\frac{}{u_0^2}}\sin\frac{g}{u_0^2}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right] \\ & + \frac{1}{2\pi}\,\frac{\Delta_1}{u_0}\, e^{i\omega t}\{\cdots\} + \frac{1}{2\pi}\,\frac{\overline{\Delta}_1}{u_0}\, e^{-i\omega t}\,\overline{\{\cdots\}} \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \{\cdots\} = {}& \frac{1}{2}\left(1 - i\,\frac{\alpha}{\beta}\right) I_3\left(x, 0, -\frac{a}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + i\,\frac{\alpha}{\beta}\right) I_4\left(x, 0, -\frac{a}{2}\right) + \frac{\mu_1 - \Omega}{\mu_1 - \mu_2}\, I_1\left(x, 0, -\frac{a}{2}, \mu_1\right) \\ & + \frac{\mu_2 - \Omega}{\mu_2 - \mu_1}\, I_1\left(x, 0, -\frac{a}{2}, \mu_2\right) - i\pi\,\frac{\mu_1 - \Omega}{\mu_1 - \mu_2}\, e^{-\mu_1\frac{g\,h}{u_0^2}}\, e^{-\mu_1\frac{g}{u_0^2}\left(x + \frac{a}{2}\right)} \\ & - i\pi\,\frac{\mu_2 - \Omega}{\mu_2 - \mu_1}\, e^{-\mu_2\frac{g\,h}{u_0^2}}\, e^{-\mu_2\frac{g}{u_0^2}\left(x + \frac{a}{2}\right)} + i\,\frac{\Omega}{\mu_1}\, e^{-\mu_1\frac{g\,h}{u_0^2}}\, I_7\left(x, 0, -\frac{a}{2}, \mu_1\right)\cdot\frac{\mu_1 - \Omega}{\mu_1 - \mu_2} \\ & + i\,\frac{\Omega}{\mu_2}\, e^{-\mu_2\frac{g\,h}{u_0^2}}\, I_7\left(x, 0, -\frac{a}{2}, \mu_2\right)\cdot\frac{\mu_2 - \Omega}{\mu_2 - \mu_1} \\ & + \left[\begin{array}{ll} \dfrac{i\pi\,\Omega}{\mu_1 - \mu_2}\, e^{-\mu_1\frac{g\,h}{u_0^2}}\left(e^{-i\frac{\omega}{u_0}\left(x + \frac{a}{2}\right)} - e^{-i\mu_1\frac{g}{u_0^2}\left(x + \frac{a}{2}\right)}\right) & \left(\text{für } x > -\dfrac{a}{2}\right), \\ 0 \qquad \left(\text{für } x < -\dfrac{a}{2}\right), & \end{array}\right] \\ & + \left[\begin{array}{ll} \dfrac{i\pi\,\Omega}{\mu_2 - \mu_1}\, e^{-\mu_2\frac{g\,h}{u_0^2}}\left(e^{-i\frac{\omega}{u_0}\left(x + \frac{a}{2}\right)} - e^{-i\mu_2\frac{g}{u_0^2}\left(x + \frac{a}{2}\right)}\right) & \left(\text{für } x > -\dfrac{a}{2}\right), \\ 0 \qquad \left(\text{für } x < -\dfrac{a}{2}\right). & \end{array}\right] \end{aligned}\right\}$$

Mit Hilfe der Integralformeln (10) bis (13) und (17) bis (21) erkennt man leicht, daß $\lim_{x \to -\infty} Y(x, t)$ nur durch die wellenförmige Anströmung bestimmt ist, wie es auch sein muß. Der Wert von $\lim_{x \to \infty} Y(x, t)$ ist ebenfalls ohne weiteres aus (39) abzulesen; jedoch kommt diesem keine physikalische Realität zu, denn die freien Wirbel bleiben ja in Wirklichkeit nicht in unveränderter Stärke hinter dem Flügel erhalten, wie wir es hier voraussetzten, sondern sie zerfallen allmählich. Gleichung (39) gilt deshalb für $x > 0$ nur in der Umgebung des Tragflügels. Für einige grundsätzliche kritische Betrachtungen zu der Formel für die Form der freien Wasseroberfläche kann auf Arbeit I, Ziff. 6 verwiesen werden[1].

10. Beweis der Integralformeln. Wir haben nunmehr den Beweis für die Integralformeln (10) bis (13) und (17) bis (21) nachzutragen.

a) Beweis von (10), (11). Wir führen den Beweis für Formel (11); ganz analog ist er für Formel (10). Im Folgenden sind A und H Abkürzungen für $\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)$ und $\frac{g}{u_0^2}(h-y)$. Es ist

$$\int_0^\infty \frac{e^{-H\mu + iA\mu}}{\mu + \Omega}\, d\mu = -e^{\Omega H - i\Omega A}\left[C_i(\Omega A) + i\, S_i(\Omega A) \mp i\,\frac{\pi}{2}\right] - e^{\Omega H - i\Omega A}\int_1^\infty (1 - e^{-\Omega H \tau})\, e^{i\Omega A \tau}\,\frac{d\tau}{\tau}; \qquad \begin{pmatrix} -A > 0 \\ +A < 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$C_i(\Omega A) = -\int_{\Omega A}^\infty \cos\tau\,\frac{d\tau}{\tau}, \qquad C_i(-\Omega A) = C_i(\Omega A)$$

und

$$S_i(\Omega A) = \int_0^{\Omega A} \sin\tau\,\frac{d\tau}{\tau}; \qquad S_i(-\Omega A) = -S_i(\Omega A).$$

Aus

$$\int_1^\infty e^{-\vartheta\tau + i\Omega A\tau}\, d\tau = \frac{e^{-\vartheta + i\Omega A}}{\vartheta - i\Omega A}$$

folgt durch Integration über ϑ

$$\int_1^\infty (1 - e^{-\Omega H\tau})\, e^{i\Omega A\tau}\,\frac{d\tau}{\tau} = e^{i\Omega A}\int_0^{\Omega H} e^{-\vartheta}\,\frac{\vartheta + i\Omega A}{\vartheta^2 + \Omega^2 A^2}\, d\vartheta.$$

Damit ist der erste Teil von Formel (11) bewiesen. Es gilt nun

$$e^{i\Omega A}\int_0^{\Omega H} e^{-\vartheta}\,\frac{\vartheta + i\Omega A}{\vartheta^2 + \Omega^2 A^2}\, d\vartheta = \int_0^{\Omega H}\frac{\vartheta + i\Omega A}{\vartheta^2 + \Omega^2 A^2}\, d\vartheta + \int_0^{\Omega H}(e^{-(\vartheta - i\Omega A)} - 1)\,\frac{d\vartheta}{\vartheta - i\Omega A}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{A^2 + H^2}{A^2} + i\,\operatorname{arctg}\frac{H}{A} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\cdot n!}\left[(i\Omega A - \Omega H)^n - (i\Omega A)^n\right].$$

Hieraus ergibt sich die zu beweisende Formel (11), wenn man noch bedenkt, daß

$$\operatorname{arctg}\frac{H}{A} = \pm\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{A}{H} \qquad \begin{pmatrix} +A > 0 \\ -A < 0 \end{pmatrix}$$

ist und ferner für $C_i(\Omega A)$ und $S_i(\Omega A)$ die bekannten Reihenentwicklungen einführt

$$C_i(\Omega A) = 0{,}5772 + \frac{1}{2}\ln\Omega^2 A^2 - \frac{(\Omega A)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(\Omega A)^4}{4\cdot 4!} - \cdots$$

$$S_i(\Omega A) = \Omega A - \frac{(\Omega A)^3}{3\cdot 3!} + \cdots.$$

[1] Der zeitunabhängige Anteil von (39) stimmt natürlich genau mit der Oberfächenform der stationären Theorie nach Gleichung (I, 1), (I, 34) überein.

b) Beweis von (12), (13). Wir führen den Beweis für Formel (12); ganz analog ist er für (13). Dabei können wir $A > 0$ voraussetzen, da der Fall $A < 0$ durch den konjugiert komplexen Wert der Formel (13) erfaßt ist. Es gilt

$$\int_0^\infty \frac{e^{iA\mu - H\mu}}{\mu + \alpha + i\beta}\, d\mu = e^{H\alpha - iA\alpha}\left(\int_0^\infty \frac{e^{-H\tau + iA\tau}}{\tau + i\beta}\, d\tau - \int_0^\alpha \frac{e^{-H\tau + iA\tau}}{\tau + i\beta}\, d\tau\right).$$

Die Integration über den Viertelkreis des ersten Quadranten der $(\tau + i\tau')$-Ebene liefert nach der Residuenmethode für unendlichen Kreisradius

$$\int_0^\infty \frac{e^{-H\tau + iA\tau}}{\tau + i\beta}\, d\tau = \int_0^\infty \frac{e^{-iH\tau' - A\tau'}}{\tau' + \beta}\, d\tau'$$

$$= -e^{\beta A + i\beta H}\left[0{,}5772 + \frac{1}{2}\ln(A^2 + H^2) + \frac{1}{2}\ln\beta^2 + i\,\mathrm{arctg}\,\frac{H}{A} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot n!}(-i\beta H - \beta A)^n\right],$$

wobei die letzte Umformung auf (11) beruht.
Ferner ist

$$\int_0^\alpha \frac{e^{-H\tau + iA\tau}}{\tau + i\beta}\, d\tau = e^{iH\beta + A\beta}\int_0^\alpha (e^{(iA - H)(\tau + i\beta)} - 1)\frac{d\tau}{\tau + i\beta} + e^{iH\beta + A\beta}\int_0^\alpha \frac{\tau - i\beta}{\tau^2 + \beta^2}\, d\tau$$

$$= e^{\beta A + i\beta H}\left\{\frac{1}{2}\ln(\alpha^2 + \beta^2) - \frac{1}{2}\ln\beta^2 - i\,\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha}{\beta} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(iA - H)^n}{n\cdot n!}\left[(\alpha + i\beta)^n - (i\beta)^n\right]\right\}.$$

Also wird

$$\int_0^\infty \frac{e^{-H\mu + iA\mu}}{\mu + \alpha + i\beta}\, d\mu = -e^{(H - iA)(\alpha + i\beta)}\left[0{,}5772 + \frac{1}{2}\ln(A^2 + H^2)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\ln(\alpha^2 + \beta^2) + i\,\mathrm{arctg}\,\frac{\beta}{\alpha} - i\,\mathrm{arctg}\,\frac{A}{H} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot n!}(iA - H)^n(\alpha + i\beta)^n\right]$$

$$= -e^{(H - iA)(\alpha + i\beta)}\, E_i((iA - H)(\alpha + i\beta)),$$

wie man unter Benutzung einer bekannten[1] Darstellung für die E_i-Funktion mit komplexem Argument erkennt. Es gilt nun[1]

$$\lim_{A \to \pm\infty} E_i((iA - H)(\alpha + i\beta)) = \lim_{A \to \pm\infty} \frac{e^{(iA - H)(\alpha + i\beta)}}{(iA - H)(\alpha + i\beta)},$$

und damit ist Formel (12) vollständig bewiesen.

c) Beweis von (17), (18). Wir führen den Beweis für Formel (17); ganz analog ist er für Formel (18). Es ist

$$\int_\xi^\infty e^{-i\frac{\omega}{u_0}(X - \xi)}\frac{h\, dX}{(x - X)^2 + h^2} = e^{-i\frac{\omega}{u_0}(x - \xi)}\int_{-\frac{x - \xi}{h}}^\infty \frac{e^{-i\frac{\omega h}{u_0}\tau}}{\tau^2 + 1}\, d\tau$$

$$= e^{-i\Omega A}\left[\int_0^\infty \frac{e^{-i\Omega H\tau}}{\tau^2 + 1}\, d\tau + \int_0^{A/H} e^{i\Omega H\tau}\frac{d\tau}{\tau^2 + 1}\right] \qquad \text{(gilt auch für } A \lesseqgtr 0).$$

Die Integration über den Viertelkreis des ersten Quadranten der $(\tau + i\tau')$-Ebene liefert nach der Residuenmethode bei unendlichem Kreisradius

$$\int_0^\infty \frac{e^{i\Omega H\tau}}{\tau^2 + 1}\, d\tau \mp i\int_0^\infty \frac{e^{-\Omega H\tau'}}{\tau'^2 - 1}\, d\tau' = \frac{\pi}{2}\, e^{-\Omega H};$$

[1] Vgl. z. B. *Lösch-Schoblik*, Die Fakultät und verwandte Funktionen S. 118—122, 1951.

also wird[1]

$$\int_0^\infty \frac{e^{-i\Omega H\tau}}{\tau^2+1}\,d\tau = \frac{\pi}{2}e^{-\Omega H} + \frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-\Omega H\tau'}}{\tau'-1}\,d\tau' - \frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-\Omega H\tau'}}{\tau'+1}\,d\tau' = \frac{\pi}{2}e^{-\Omega H} + \frac{i}{2}e^{-\Omega H}\int_{-\Omega H}^\infty e^{-\vartheta}\frac{d\vartheta}{\vartheta}$$

$$-\frac{i}{2}e^{\Omega H}\int_{\Omega H}^\infty e^{-\vartheta}\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{\pi}{2}e^{-\Omega H} - \frac{i}{2}e^{-\Omega H}E_i^*(\Omega H) + \frac{i}{2}e^{\Omega H}E_i(-\Omega H).$$

Weiter ist

$$\int_0^{A/H} e^{i\Omega H\tau}\frac{d\tau}{\tau^2+1} = \frac{e^{-\Omega H}}{2i}\int_0^{A/H}\frac{\tau+i}{\tau^2+1}\,d\tau + \frac{e^{-\Omega H}}{2i}\int_0^{A/H}(e^{i\Omega H(\tau-i)}-1)\frac{d\tau}{\tau-i}$$

$$-\frac{e^{\Omega H}}{2i}\int_0^{A/H}\frac{\tau-i}{\tau^2+1}\,d\tau - \frac{e^{\Omega H}}{2i}\int_0^{A/H}(e^{i\Omega H(\tau+i)}-1)\frac{d\tau}{\tau+i} = \mathfrak{Cof}\,\Omega H\cdot\operatorname{arctg}\frac{A}{H}$$

$$+\frac{i}{2}\mathfrak{Sin}\,\Omega H\cdot\ln\left(1+\frac{A^2}{H^2}\right) + \frac{e^{-\Omega H}}{2i}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n\cdot n!}[(\Omega H+i\Omega A)^n-(\Omega H)^n]$$

$$-\frac{e^{\Omega H}}{2i}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n\cdot n!}[(-\Omega H+i\Omega A)^n-(-\Omega H)^n].$$

Damit ist Formel (17) bewiesen; die Richtigkeit des angegebenen Grenzwertes für $x\to\pm\infty$ entnimmt man leicht aus der obigen Herleitung.

d) Beweis von (19). Es ist

$$I_7 = e^{-i\frac{\omega}{u_0}(x-\xi)}\left\{\int_{-\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(x-\xi)}^\infty e^{i\left(1-\frac{\Omega}{\mu_1}\right)\tau}\left[C_i(\tau)-iS_i(\tau)+i\frac{\pi}{2}\right]d\tau\right.$$

$$\left.+\int_{-\frac{\mu_1 g}{u_0^2}(x-\xi)}^\infty e^{-i\frac{\Omega}{\mu_1}\tau}\int_0^{\mu_1\frac{g\,h}{u_0^2}} e^{\vartheta}\frac{\vartheta+i\tau}{\vartheta^2+\tau^2}\,d\vartheta\,d\tau\right\}.$$

Zunächst ist (A beliebig)

$$\int_{-\mu_1 A}^\infty e^{i\left(1-\frac{\Omega}{\mu_1}\right)\tau}\left[C_i(\tau)-iS_i(\tau)+i\frac{\pi}{2}\right]d\tau = -\int_{-\mu_1 A}^\infty e^{i\left(1-\frac{\Omega}{\mu_1}\right)\tau}\int_\tau^\infty\frac{e^{-i\vartheta}}{\vartheta}\,d\vartheta\,d\tau$$

$$=\left[\frac{i\mu_1}{\mu_1-\Omega}e^{i\left(1-\frac{\Omega}{\mu_1}\right)\tau}\int_\tau^\infty\frac{e^{-i\vartheta}}{\vartheta}\,d\vartheta\right]_{-\mu_1 A}^\infty + \frac{i\mu_1}{\mu_1-\Omega}\int_{-\mu_1 A}^\infty e^{-i\frac{\Omega}{\mu_1}\tau}\frac{d\tau}{\tau}$$

$$=\frac{i\mu_1}{\mu_1-\Omega}e^{-i(\mu_1-\Omega)A}\left[C_i(\mu_1 A)+iS_i(\mu_1 A)+i\frac{\pi}{2}\right]-\frac{i\mu_1}{\mu_1-\Omega}\left[C_i(\Omega A)+iS_i(\Omega A)+i\frac{\pi}{2}\right].$$

Weiter haben wir

$$\int_{-\mu_1 A}^\infty e^{-i\frac{\Omega}{\mu_1}\tau}\int_{\vartheta=0}^{\mu_1 H} e^{\vartheta}\frac{\vartheta+i\tau}{\vartheta^2+\tau^2}\,d\vartheta\,d\tau = \int_{\vartheta=0}^{\mu_1 H} e^{\vartheta}\int_0^\infty e^{-i\frac{\Omega}{\mu_1}\tau}\frac{\vartheta+i\tau}{\vartheta^2+\tau^2}\,d\tau\,d\vartheta + \int_0^{\mu_1 A} e^{i\frac{\Omega}{\mu_1}\tau}\int_{\vartheta=0}^{\mu_1 H} e^{\vartheta}\frac{\vartheta-i\tau}{\vartheta^2+\tau^2}\,d\vartheta\,d\tau.$$

---

[1] **Die beiden reellen Funktionen $E_i^*(x) = -\int_{-x}^\infty e^{-\vartheta}\frac{d\vartheta}{\vartheta}$ und $E_i(-x) = -\int_x^\infty e^{-\vartheta}\frac{d\vartheta}{\vartheta}$ sind tabelliert bei Jahnke-Emde, Tafeln höherer Funktionen.**

Nach Formel (13) wird nun

$$\int_0^\infty e^{-i\frac{\Omega}{\mu_1}\tau}\frac{d\tau}{\vartheta - i\tau} = i\int_0^\infty e^{-i\frac{\Omega}{\mu_1}\tau}\frac{d\tau}{\tau + i\vartheta} = -i\,e^{-\frac{\Omega}{\mu_1}\vartheta}\left[0{,}5772 + \ln\frac{\Omega\vartheta}{\mu_1} + i\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot n!}\left(\frac{\Omega\vartheta}{\mu_1}\right)^n\right]$$

$$= e^{-\frac{\Omega}{\mu_1}\vartheta}\left[\pi - i\,E_i^*\left(\frac{\Omega\vartheta}{\mu_1}\right)\right],$$

und daraus folgt weiter

$$\int_{\vartheta=0}^{\mu_1 H} e^{\vartheta}\int_0^\infty e^{-i\frac{\Omega}{\mu_1}\tau}\frac{\vartheta + i\tau}{\vartheta^2+\tau^2}\,d\tau\,d\vartheta = \pi\int_0^{\mu_1 H} e^{\left(1-\frac{\Omega}{\mu_1}\right)\vartheta}\,d\vartheta + i\int_0^{\mu_1 H} e^{\left(1-\frac{\Omega}{\mu_1}\right)\vartheta}\int_{-\frac{\Omega\vartheta}{\mu_1}}^\infty e^{-\chi}\frac{d\chi}{\chi}\,d\vartheta$$

$$= \frac{\pi\mu_1}{\mu_1-\Omega}\left(e^{H\mu_1 - H\Omega} - 1\right) + \frac{i\mu_1}{\mu_1-\Omega}\left[e^{\left(1-\frac{\Omega}{\mu_1}\right)\vartheta}\int_{-\frac{\Omega\vartheta}{\mu_1}}^\infty e^{-\chi}\frac{d\chi}{\chi}\right]_0^{\mu_1 H} + \frac{i\mu_1}{\mu_1-\Omega}\int_0^{\mu_1 H} e^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\vartheta}$$

$$= \frac{\mu_1}{\mu_1-\Omega}\left[\pi\,e^{H\mu_1 - H\Omega} - \pi - i\,e^{H\mu_1 - H\Omega}E_i^*(\Omega H) + i\,E_i^*(\mu_1 H)\right].$$

Schließlich ist noch zu berechnen (A beliebig)

$$\int_0^{\mu_1 A} e^{i\frac{\Omega}{\mu_1}\tau}\int_{\vartheta=0}^{\mu_1 H} e^{\vartheta}\frac{\vartheta - i\tau}{\vartheta^2+\tau^2}\,d\vartheta\,d\tau = \int_0^{\mu_1 A} e^{-i\left(1-\frac{\Omega}{\mu_1}\right)\tau}d\tau\left[\int_0^{\mu_1 H}\frac{\vartheta - i\tau}{\vartheta^2+\tau^2}\,d\vartheta + \int_0^{\mu_1 H}\left(e^{\vartheta + i\tau} - 1\right)\frac{d\vartheta}{\vartheta + i\tau}\right]$$

$$= \int_0^{\mu_1 A} e^{-i\left(1-\frac{\Omega}{\mu_1}\right)\tau}\left[\frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\mu_1^2 H^2}{\tau^2}\right) - i\,\operatorname{arctg}\frac{\mu_1 H}{\tau} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mu_1 H + i\tau)^n - (i\tau)^n}{n\cdot n!}\right]d\tau\,.$$

Durch Zusammenfassung der einzelnen Integralanteile ergibt sich die zu beweisende Formel (19). Auch die in (19) angegebenen Werte für $\lim_{x\to\pm\infty} I_7$ sind aus den in der obigen Herleitung enthaltenen Formeln ohne Schwierigkeit zu entnehmen.

e) Beweis von (20), (21). Wir führen den Beweis für Formel (20); ganz analog ist er für Formel (21). Wir schreiben zunächst unter Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$\lim_{X_0\to\infty}\int_\xi^{X_0}\int_0^\infty \frac{e^{-i\frac{\omega}{u_0}(X-\xi)}e^{-H\mu}e^{i\frac{g}{u_0^2}(x-X)\mu}}{\mu^2 - \mu + 2\mu\Omega + \Omega^2}\,\mu\,d\mu\,\frac{g}{u_0^2}\,dX = -i\int_0^\infty \frac{e^{-H\mu}e^{i\frac{g}{u_0^2}(x-\xi)\mu}}{(\mu+\Omega)(\mu^2-\mu+2\mu\Omega+\Omega^2)}\,\mu\,d\mu$$

$$+ i\lim_{X_0\to\infty} e^{-i\frac{\omega}{u_0}(X_0-\xi)}\int_0^\infty \frac{e^{-H\mu}e^{-i\frac{g}{u_0^2}(X_0-x)\mu}}{(\mu+\Omega)(\mu^2-\mu+2\mu\Omega+\Omega^2)}\,\mu\,d\mu.$$

Da

$$\frac{\mu}{(\mu+\Omega)(\mu^2-\mu+2\mu\Omega+\Omega^2)} = \frac{\alpha+i\beta-\Omega}{2i\beta}\frac{1}{\mu+\alpha+i\beta} - \frac{\alpha-i\beta-\Omega}{2i\beta}\frac{1}{\mu+\alpha-i\beta} - \frac{1}{\mu+\Omega}$$

ist, folgt nach (11), (12), (13), daß das X_0 enthaltende Integral für $X_0\to\infty$ verschwindet, und es ergibt sich genau Formel (20).

(Eingegangen am 20. Juli 1959.)

Aus dem Institut für Angewandte Mathematik und Mechanik
der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. habil. *W. H. Isay*, Berlin-Dahlem, Schweinfurthstr. 90.

Beitrag zur Berechnung des Wärmeüberganges und Druckabfalles laminarer Einlaufströmungen. *

Von **Karl Stephan**

1. Einleitung. Die theoretische Grundlage von Problemen der konvektiven Wärmeübertragung sind bekanntlich die *Fourier*sche Energiegleichung[1] und die *Navier-Stokes*sche Bewegungsgleichung[2] aus der sich für sehr kleine Zähigkeiten die wesentlich einfachere *Prandtl*sche Grenzschichtgleichung[3] herleiten läßt. Im Fall temperaturabhängiger Stoffwerte können diese Gleichungen nicht unabhängig voneinander gelöst werden, weil das Strömungsfeld auf das Temperaturfeld einwirkt und umgekehrt eine Rückwirkung vom Temperaturfeld auf das Strömungsfeld besteht. Der mathematischen Behandlung des Problems stehen beträchtliche Schwierigkeiten entgegen. Aus diesem Grunde ist bisher noch keine umfassende Lösung über den Einfluß der Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte bekannt geworden.

Sofern jedoch die Temperaturunterschiede innerhalb des strömenden Mediums nicht sehr groß sind, kann die Zähigkeit konstant gesetzt werden. Das ist bei einer Reihe von Stoffen recht gut erfüllt.[4] Ist ferner die Dichte konstant, dann entfällt die Rückwirkung des Temperaturfeldes auf das Strömungsfeld. Man hat also zuerst die für das Strömungsfeld maßgebenden Gleichungen zu lösen und kann ausgehend von dieser Lösung das Temperaturfeld berechnen.

In der folgenden Untersuchung wird auf Grund einer solchen Rechnung die im Einlauf von Rohren und von ebenen Spalten übertragene Wärmemenge bestimmt. Gleichzeitig wird der Druckabfall ermittelt. Es wird Laminarströmung vorausgesetzt. Neben der Zähigkeit sollen auch alle übrigen Stoffwerte nicht von der Temperatur abhängig sein; die Reibungswärme und die Wärmeleitung in Strömungsrichtung werden vernachlässigt. Es wird angenommen, eine Flüssigkeit ströme aus einem größeren Raum in ein Rohr oder in einen ebenen Spalt. Dann ist die Geschwindigkeit aller Flüssigkeitsteilchen über den Eintrittsquerschnitt des Kanals konstant. Außerdem sollen die Temperatur der Kanalwand und die der Flüssigkeit im Eintrittsquerschnitt konstant, aber voneinander verschieden sein.

2. Physikalische Beschreibung des Problems. Auf Grund der Vorstellungen der Grenzschichttheorie gelangt man zu einer physikalisch anschaulichen Deutung der Vorgänge im Einlauf. Tritt die Flüssigkeit in den Kanal ein, so werden die Teilchen in unmittelbarer Wandnähe unter dem Einfluß der Reibungskräfte verzögert. Aus Kontinuitätsgründen erfährt die praktisch reibungsfreie Strömung in der Mitte des Kanals, die sogenannte Kernströmung, eine Beschleunigung, welcher nach der *Bernoulli*schen Gleichung ein Druckabfall entspricht. Stromabwärts werden immer mehr Teilchen von Reibungskräften erfaßt. Die Grenzschichtdicke sowie die Geschwindigkeit der Kernströmung nehmen zu. Das Geschwindigkeitsprofil geht schließlich asymptotisch in die *Poiseuille*sche Parabel über.

Entsprechend der Strömungsgrenzschicht bildet sich eine Temperaturgrenzschicht aus, die ebenfalls mit der Lauflänge anwächst. In hinreichender Entfernung von Eintrittsquerschnitt ändert sich auch die Temperatur der Teilchen in der Mitte des Kanals. Das Temperaturprofil geht asymptotisch in die konstante Temperatur der Kanalwand über.

Man kann den Einlaufvorgang als einen Ausgleichsprozeß auffassen. Dieser führt zu einem Gleichgewicht, das erreicht ist, wenn das Geschwindigkeitsprofil in die *Poiseuille*sche Parabel übergegangen ist, und wenn sich die Temperatur der Flüssigkeit nicht mehr von der der Kanalwand unterscheidet. Das Gleichgewicht wird um so rascher angestrebt, je weiter man von ihm entfernt ist. Ganz vorn im Einlauf wird daher mehr Wärme je Flächeneinheit übertragen als weiter hinten. Ebenso sind die Wandschubspannung und damit auch der Druckabfall in der Nähe des Eintrittsquerschnitts größer als weiter stromabwärts. Der bessere Wärmeübergang von Einlaufströmungen ist also mit einem höheren Druckabfall verbunden.

* Auszug aus der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Karlsruhe genehmigten Dissertation des Verfassers.

[1] *J. B. Fourier*, Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822.

[2] *M. Navier*, Mem. d. L'Acad. d. Sci. 6, (1827); *G. G. Stokes*, Trans. Cambr. Phil. Soc. 8, (1845).

[3] *L. Prandtl*, Verh. d. III Intern. Math. Kongr. Heidelberg 1904.

[4] *G. H. Göttner*, Erdöl und Kohle 3 (1950), S. 598.

Trotz der einfachen physikalischen Modellvorstellung des Einlaufvorganges existieren indessen nur wenige Untersuchungen, die sich mit der Überlagerung von hydrodynamischer und thermischer Einlaufströmung befassen. Es wurden lediglich eine Reihe von Näherungslösungen bekannt[1,2,3,4,5], die vorwiegend in einiger Entfernung vom Eintrittsquerschnitt und für solche Stoffe gültig sind, deren *Prandtl*-Zahl $Pr \approx 1$ ist. Die *Prandtl*-Zahl ist hierbei definiert durch $Pr = \mu c_p/\lambda$ mit der dynamischen Zähigkeit μ, der spezifischen Wärme bei konstantem Druck c_p und der Wärmeleitzahl λ. Neuerdings hat *W. Geck*[6] ein Differenzenverfahren zur Lösung der *Prandtl*schen Grenzschichtgleichung und der *Fourier*schen Energiegleichung angegeben. Er berechnete den Wärmeübergang und den Druckabfall im Einlauf luftdurchströmter ebener Spalte. Für Luft ist $Pr \approx 0{,}75$. Das ziemlich mühsame Differenzenverfahren erfordert jedoch einen kaum zu bewältigenden Rechenaufwand für $Pr \gg 1$, weil man dann eine außerordentlich kleine Schrittweite wählen muß.

3. Mathematische Formulierung des Problems. Es werden folgende Größen eingeführt:

x = Koordinate in Strömungsrichtung, gerechnet vom Eintrittsquerschnitt an;
y = Koordinate senkrecht zur Strömungsrichtung, gerechnet von der Kanalwand an;
u = Geschwindigkeit in Strömungsrichtung;
u_δ = Geschwindigkeit der Potentialströmung;
v = Geschwindigkeit senkrecht zur Strömungsrichtung;
U_0 = konstante Geschwindigkeit im Eintrittsquerschnitt;
s = halbe Spaltbreite oder Rohrradius;
ϱ = Dichte;
ν = kinematische Zähigkeit;
t = Temperatur eines Flüssigkeitsteilchens;
t_w = konstante Temperatur der Kanalwand;
t_0 = konstante Temperatur im Eintrittsquerschnitt;
p = Druck eines Flüssigkeitsteilchens.

Für die Rechnungen erweist es sich als zweckmäßig, dimensionslose Größen einzuführen. Wir definieren die *Reynolds*sche Zahl durch

$$Re = \frac{U_0 s}{\nu},$$

und es sei

$$U = \frac{u}{U_0}, \qquad U_\delta = \frac{u_\delta}{U_0}, \qquad V = \frac{v}{U_0} Re,$$

$$X = \frac{x}{s\, Re}, \qquad Y = \frac{y}{s}, \qquad T = \frac{t - t_w}{t_0 - t_w}.$$

Die exakte Beschreibung des Wärmeüberganges erfordert die Berechnung des Temperaturfeldes, die wiederum die Kenntnis des Strömungsfeldes voraussetzt. Für die Geschwindigkeitsverteilung der ebenen Strömung ist die *Prandtl*sche Grenzschichtgleichung maßgebend, die unter der Voraussetzung kleiner Zähigkeiten gilt. Sie lautet mit den oben definierten dimensionslosen Größen

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = U_\delta \frac{dU_\delta}{dX} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}. \tag{1}$$

Ferner muß die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \tag{2}$$

erfüllt sein. Die Temperaturverteilung der ebenen Strömung berechnet man aus der *Fourier*schen Energiegleichung

$$U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}. \tag{3}$$

[1] *S. Sugawara, T. Sato*, Mem. Fac. Engn. Kyoto Univ. 16 (1954), S. 166.
[2] *K. Elser*, Allg. Wärmetechn. 3 (1952), S. 30.
[3] *H. Hahnemann*, L. Ehret, ZMB-Forsch. Ber. Nr. 1751 (1943).
[4] *W. M. Kays*, Trans. ASME 77 (1955), S. 1265.
[5] *J. A. Businger*, Ingenieur 64 (1952), S. 17.
[6] *W. Geck*, Diss. T. H. Karlsruhe 1953.

Hierin sind $U = U(X, Y)$, $V = V(X, Y)$, $U_\delta = U_\delta(X)$, $T = T(X, Y)$. Die Randbedingungen lauten

$$X > 0\,, \quad Y = 0 \quad \text{und} \quad Y = 2 \;:\; U = V = 0\,, \quad T = 0\,,$$

$$X = 0 \qquad 0 \leqq Y \leqq 2 \qquad :\; U = 1\,, \qquad T = 1\,.$$

Wie *H. Schlichting*[1] gezeigt hat, gelten die Gleichungen (1) bis (3) nicht nur für die ebene Strömung. Sie bleiben auch noch für gekrümmte Wände gültig, solange die Grenzschichtdicke gegenüber dem Krümmungsradius der Kanalwand klein ist. Diese Voraussetzung trifft vorn im Einlauf von Rohren und auch von Ringspalten zu. Dort darf man also zur Berechnung der Grenzschichten ebenfalls das System der Gleichungen (1) bis (3) benutzen.

4. Lösung für das Strömungsgeschwindigkeitsfeld. Die Integration der Gleichungen (1) und (2) erfolgt nach bekannten Methoden der Grenzschichttheorie[2, 3, 4]. Diese bestehen darin, daß man eine Stromfunktion $\Psi(X, Y)$ einführt, welche die Kontinuitätsgleichung erfüllt. Es soll also gelten

$$\frac{\partial \Psi(X, Y)}{\partial Y} = U(X, Y) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \Psi(X, Y)}{\partial X} = -\,V(X, Y)\,.$$

Für die Stromfunktion macht man einen Reihenansatz

$$\Psi(X, \eta) = f_0(\eta)\, X^{1/2} + u_1 f_1(\eta)\, X + u_2 f_2(\eta)\, X^{3/2} + \cdots \tag{4}$$

mit

$$\eta = \frac{Y}{2X^{1/2}}\,.$$

In η ist die Koordinate Y durch den Wert $2\,X^{1/2}$ dividiert. Dieser ist der Grenzschichtdicke $\delta_*(X)$ der längsangeströmten ebenen Platte proportional. Die $f_i(\eta)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ sind die sogenannten Koeffizientenfunktionen des Geschwindigkeitsfeldes. Die u_i sind noch näher zu bestimmende Konstanten.

Bildet man in Gleichung (4)

$$\frac{\partial \Psi(X, Y)}{\partial Y} = U(X, Y) = \frac{1}{2}\,[f_0'(\eta) + u_1 f_1'(\eta)\, X^{1/2} + u_2 f_2'(\eta)\, X + \cdots]\,, \tag{5}$$

so erhält man eine Aussage über die Potentialströmung $U_\delta(X)$.

Für hinreichend große Werte η muß $U(Y, Y)$ in die Potentialströmung $U_\delta(X)$ übergehen. Gleichung (5) muß also für $\eta \to \infty$ unabhängig von Y werden. Das ist nur möglich, wenn die $f_i'(\eta \to \infty)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots]$ konstante Werte annehmen. Es ist zweckmäßig $f_i'(\eta \to \infty) = 2$ zu setzen, weil dann der Faktor 1/2 in Gleichung (5) wegfällt. Damit lautet der Ansatz für die Potentialströmung

$$U_\delta(X) = 1 + u_1 X^{1/2} + u_2 X + u_3 X^{3/2} + \cdots\,. \tag{6}$$

Zur Lösung der *Prandtl*schen Grenzschichtgleichung (1) setzt man die Ansätze (4) und (6) in Gleichung (1) ein und nimmt die erforderlichen Differentiationen vor. Setzt man die Glieder gleich hoher Potenzen von X gleich null, so erhält man ein System von unendlich vielen gewöhnlichen Differentialgleichungen. Dieses enthält noch die Konstanten u_i, von denen man sich befreien kann, wenn man entsprechend dem Vorgehen von *Howarth*[5] weitere Koeffizientenfunktionen einführt. Es sei

$$f_2(\eta) = g_2(\eta) + \frac{u_1^2}{u_2}\, h_2(\eta)\,,$$

$$f_3(\eta) = g_3(\eta) + \frac{u_1 u_2}{u_3}\, h_3(\eta) + \frac{u_1^3}{u_3}\, k_3(\eta)\,,$$

$$f_4(\eta) = g_4(\eta) + \frac{u_1 u_3}{u_4}\, h_4(\eta) + \frac{u_2^2}{u_4}\, k_4(\eta) + \frac{u_1^2 u_2}{u_4}\, l_4(\eta) + \frac{u_1^4}{u_4}\, m_4(\eta)\,, \ldots$$

---

[1] *H. Schlichting*, Grenzschichttheorie. S. 106—107, Karlsruhe 1958.
[2] *H. Blasius*, Z. Math. Phys. 56 (1908), S. 1.
[3] *L. Howarth*, ARC Reports and Memoranda 1632 (1935).
[4] *K. Hiemenz*, Diss. Göttingen 1911.
[5] *L. Howarth*, Proc. Roy. Soc. Lond. A 164 (1938, S. 453.

An die Stelle der *Prandtl*schen Grenzschichtgleichung (1) tritt dann das folgende rekursiv zu lösende Gleichungssystem mit der unabhängigen Veränderlichen η:

$$f_0''' + f_0'' f_0 = 0\,, \tag{7}$$

$$f_1''' + f_1'' f_0 - f_1' f_0' + 2 f_1 f_0'' = -4\,, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} g_2''' + g_2'' f_0 - 2 g_2' f_0' + 3 g_2 f_0'' &= -8\,, \\ h_2''' + h_2'' f_0 - 2 h_2' f_0' + 3 h_2 f_0'' &= -4 + f_1'^2 - 2 f_1 f_1''\,, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} g_3''' + g_3'' f_0 - 3 g_3' f_0' + 4 g_3 f_0'' &= -12\,, \\ h_3''' + h_3'' f_0 - 3 h_3' f_3' + 4 h_3 f_0'' &= -12 + 3 f_1' g_2' - 3 f_1'' g_2 - 2 f_1 g_2''\,, \\ k_3''' + k_3'' f_0 - 3 k_3' f_0' + 4 k_3 f_0'' &= 3 f_1' h_2' - 3 f_1'' h_2 - 2 f_1 h_2''\,, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} g_4''' + g_4'' f_0 - 4 g_4' f_0' + 5 g_4 f_0'' &= -16\,, \\ h_4''' + h_4'' f_0 - 4 h_4' f_0' + 5 h_4 f_0'' &= -16 - 2 g_3'' f_1 + 4 g_3' f_1' - 4 g_3 f_1''\,, \\ k_4''' + k_4'' f_0 - 4 k_4' f_0' + 5 k_4 f_0'' &= -8 - 3 g_2'' g_2 + 2 g_2'^2\,, \\ l_4''' + l_4'' f_0 - 4 l_4' f_0' + 5 l_4 f_0'' &= -2 h_3'' f_1 + 4 h_3' f_1' - 4 h_3 f_1'' - 3 h_2'' g_2 + 4 h_2' g_2' - 3 h_2 g_2''\,, \\ m_4''' + m_4'' f_0 - 4 m_4' f_0' + 5 m_4 f_0'' &= -2 k_3'' f_1 + 4 k_3' f_1' - 4 k_3 f_1'' - 3 h_2'' h_2 + 2 h_2'^2\,, \quad \ldots \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Das System dieser Gleichungen ist für die folgenden Randbedingungen zu lösen:

1. Wegen $\Psi(X, Y = 0) = 0$ verschwinden alle Koeffizientenfunktionen an der Stelle $\eta = 0$.

2. Wegen $U(X, Y = 0) = 0$ und $V(X, Y = 0) = 0$ verschwinden die ersten Ableitungen der Koeffizientenfunktionen an der Stelle $\eta = 0$.

3. Für sehr große Werte η geht die Grenzschicht in die Potentialströmung über. Es gelte für $\eta \to \infty$

$$f_0' = f_1' = g_2' = g_3 = g_4' = \cdots = 2\,,$$
$$h_2' = h_3' = k_3' = h_4' = k_4' = l_4' = \cdots = 0\,.$$

Gleichung (7) tritt bei der Berechnung der Grenzschicht einer längsangeströmten ebenen Platte auf. Sie wurde zuerst von *H. Blasius*[1] durch Potenzreihenansätze und später von *C. Töpfer*[2] und *L. Howarth*[3] nach dem *Runge-Kutta*-Verfahren numerisch gelöst. Nach dem gleichen Verfahren berechnete *L. Howarth* ferner die Koeffizientenfunktionen g_2, während *B. Punnis*[4] die Gleichungen für f_1 und h_2 sowie die Gleichungen (10) nach dem Verfahren von *Adams-Störmer* vertafelte.

Da die Koeffizientenfunktionen bei der Berechnung des Temperaturfeldes von Bedeutung sein werden, kommt es darauf an, sie möglichst genau zu kennen. In der vorliegenden Arbeit wurden daher sämtliche Koeffizientenfunktionen der Gleichungen (7) bis (10) erneut berechnet. Die numerische Rechnung wurde von der elektronischen Rechenanlage der Farbwerke Hoechst nach dem *Runge-Kutta*-Verfahren ausgeführt. Die Zahlenergebnisse sind in der Dissertation des Verfassers[5] aufgeführt.

Die Koeffizientenfunktionen des Systems der Gleichungen (7) u. f. haben universellen Charakter. Sie sind unabhängig von der Geometrie des durchströmten Kanals. Diese wird erst durch die Konstanten u_i berücksichtigt. *B. Punnis*[4] hat in seiner Arbeit ausführlich beschrieben, wie die u_i berechnet werden. An dieser Stelle seien daher lediglich die Zahlenwerte für die u_i mitgeteilt. Sie weichen etwas von den Werten ab, die *B. Punnis*[4] ermittelte.

	u_1	u_2	u_3	u_4
ebener Spalt	1,7208	— 2,2424	19,823	— 208,41
Rohr	3,4416	— 13,3347	206,252	— 4709,92

[1] siehe Fußnote 2 von S. 178.
[2] *C. Töpfer*, Z. Math. Phys. 60 (1912), S. 397.
[3] siehe Fußnote 3 von S. 178.
[4] *B. Punnis*, Diss. Göttingen 1947.
[5] *K. Stephan*, Diss. T. H. Karlsruhe 1959.

5. Lösung für das Temperaturfeld. Es ist naheliegend, die Methoden, welche sich bei der Berechnung der Strömungsgrenzschicht als fruchtbar erwiesen haben, auf die Berechnung der Temperaturgrenzschicht zu übertragen. Man macht demnach für die Temperaturverteilung den Ansatz

$$T(X, \eta) = T_0(\eta) + X^{1/2}\, T_1(\eta) + X\, T_2(\eta) + X^{3/2}\, T_3(\eta) + \cdots . \tag{12}$$

Darin sind die $T_i(\eta)$ $(i = 0, 1, 2 \ldots)$ die Koeffizientenfunktionen des Temperaturfeldes. Ähnlich wie beim Strömungsfeld werden die Koeffizientenfunktionen in folgender Weise weiter aufgespalten:

$$\left.\begin{aligned} T_1(\eta) &= u_1\, H_1(\eta)\,, \\ T_2(\eta) &= u_2\, G_2(\eta) + u_1^2\, H_2(\eta)\,, \\ T_3(\eta) &= u_3\, G_3(\eta) + u_1\, u_2\, H_3(\eta) + u_1^3\, K_3(\eta)\,, \\ T_4(\eta) &= u_4\, G_4(\eta) + u_1\, u_3\, H_4(\eta) + u_1^2\, K_4(\eta) + u_1^2\, u_2\, L_4(\eta) + u_1^4\, M_4(\eta) \\ &\ldots . \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Nach Einsetzen von (12) mit (13) und von (4) in die *Fourier*sche Energiegleichung (3) erhält man durch Koeffizientenvergleich das folgende rekursiv zu lösende System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen, in das nun auch die Koeffizientenfunktionen des Geschwindigkeitsfeldes eingehen:

$$\frac{1}{Pr}\, T_0'' + f_0\, T_0' = 0\,, \tag{14}$$

$$\frac{1}{Pr}\, H_1'' + f_0\, H_1' - f_0'\, H_1 = -2\, f_1\, T_0'\,, \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{Pr}\, G_2'' + f_0\, G_2' - 2\, f_0'\, G_2 &= -3\, T_0'\, g_2\,, \\ \frac{1}{Pr}\, H_2'' + f_0\, H_2' - 2\, f_0'\, H_2 &= -2\, H_1' f_1 + H_1 f_1' - 3\, T_0'\, h_2\,, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{Pr}\, G_3'' + f_0\, G_3' - 3\, f_0'\, G_3 &= -4\, T_0'\, g_3\,, \\ \frac{1}{Pr}\, H_3'' + f_0\, H_3' - 3\, f_0'\, H_3 &= -2\, f_1\, G_2' + 2\, f_1'\, G_2 - 3\, H_1' g_2 + H_1\, g_2' - 4\, T_0'\, h_3\,, \\ \frac{1}{Pr}\, K_3'' + f_0\, K_3' - 3\, f_0'\, K_3 &= -2\, f_1\, H_2' + 2\, f_1'\, H_2 - 3\, H_1' h_2 + H_1\, h_2' - 4\, T_0'\, k_3\,, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{Pr}\, G_4' + f_0\, G_4' - 4\, f_0'\, G_4 &= -5\, T_0'\, g_4\,, \\ \frac{1}{Pr}\, H_4'' + f_0\, H_4' - 4\, f_0'\, H_4 &= -2\, f_1\, G_3' + 3\, f_1'\, G_3 - 4\, H_1' g_3 + H_1\, g_3' - 5\, T_0'\, h_4\,, \\ \frac{1}{Pr}\, K_4'' + f_0\, K_4' - 4\, f_0'\, K_4 &= -3\, g_2\, G_2' + 2\, g_2'\, G_2 - 5\, T_0'\, k_4\,, \\ \frac{1}{Pr}\, L_4'' + f_0\, L_4' - 4\, f_0'\, L_4 &= -2\, f_1\, H_3' + 3\, f_1'\, H_3 - 3\, g_2\, H_2' - 3\, G_2'\, h_2 \\ &\quad + 2\, g_2'\, H_2 + 2\, h_2'\, G_2 - 4\, H_1' h_3 + h_3'\, H_1 - 5\, T_0'\, l_4\,, \\ \frac{1}{Pr}\, M_4'' + f_0\, M_4' - 4\, f_0'\, M_4 &= -2\, f_1\, K_3' + 3\, f_1'\, K_3 - 3\, h_2\, H_2' + 2\, h_2'\, H_2 \\ &\quad - 4\, H_1' k_3 + k_3'\, H_1 - 5\, T_0'\, m_4\,, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$\ldots$.

Dieses Gleichungssystem ist für die folgenden Randbedingungen zu lösen:

1) An der Stelle $Y = 0$, $X > 0$ muß $T(X, Y)$ verschwinden. Das ist möglich, wenn alle Koeffizientenfunktionen an der Stelle $\eta = 0$ verschwinden.

2) An der Stelle $X = 0$ ist $T(X, Y) = 1$. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn für $\eta \to \infty$ $T_0(\eta) = 1$ wird und alle übrigen Koeffizientenfunktionen null werden.

Gleichung (14) wurde erstmals von *E. Pohlhausen*[1] angegeben. Sie ergibt sich bei der Berechnung der Temperaturgrenzschicht einer längsangeströmten ebenen Platte.

---

[1] *E. Pohlhausen*, Z. angew. Math. Mech. 1 (1921), S. 115.

Wie aus dem System der Gleichungen (14) u. f. hervorgeht, gehört zu dem Strömungsfeld eine einparametrige Schar von Temperaturverteilungen mit der *Prandtl*-Zahl als Parameter. Um das Temperaturfeld über einen möglichst weiten Bereich der *Prandtl*-Zahl erfassen zu können, wurden die Gleichungen (14) bis (17) für

$$Pr = 0{,}1;\ 1;\ 10;\ 100;\ 1000$$

gelöst. Für kleinere Werte als $Pr = 0{,}1$, wie sie zum Beispiel bei flüssigen Metallen vorkommen, darf die Wärmeleitung in Strömungsrichtung im allgemeinen nicht mehr vernachlässigt werden. Diese ist jedoch in den Gleichungen (14) u. f. nicht berücksichtigt. Es hat daher wenig Sinn, das Gleichungssystem auch noch für Werte $Pr < 0{,}1$ zu lösen.

Für $Pr = 0{,}1;\ 1;\ 10$ wurden die Lösungen nach dem *Runge-Kutta*-Verfahren ermittelt. Da dieses sehr mühsam ist, wurde für $Pr = 100$ und $Pr = 1000$ ein Näherungsverfahren benutzt, das sehr gute Ergebnisse liefert. Man geht dazu von der Tatsache aus, daß für große Werte Pr die Temperaturgrenzschicht sehr dünn gegenüber der Strömungsgrenzschicht ist. Die Temperatur $T(X, Y) = 1$ wird daher schon für sehr kleine Werte η erreicht, die innerhalb der Strömungsgrenzschicht liegen. Es ist daher naheliegend in den Gleichungen (14) u. f. die Koeffizientenfunktionen des Geschwindigkeitsfeldes durch die ersten Glieder ihrer Taylor-Entwicklung, Entwicklungszentrum $\eta = 0$, zu ersetzen. Dann kann man die Gleichungen (14) u. f. durch Reihenansätze lösen. Auf die Wiedergabe der umfangreichen Zahlentafeln sei an dieser Stelle verzichtet. Sie sind in der Dissertation des Verfassers[1] angegeben.

Zu einer Abschätzung des Konvergenzintervalles $0 \leqq X \leqq X_1$ der Temperaturverteilung $T(X, Y)$ und der Geschwindigkeitsverteilung $U(X, Y)$ gelangt man, wenn man zu $U(X, Y)$ und zu $T(X, Y)$ Oberreihen bildet und deren Konvergenzradius abschätzt. Eine Oberreihe zu $U(X, Y)$ ist bekanntlich die Reihe $U_\delta(X)$. Eine Oberreihe zu $T(X, Y)$ erhält man, wenn man in dem Ansatz (12) die Koeffizientenfunktionen $T_i(\eta)$ durch ihre absoluten Größtwerte ersetzt, die sich aus der numerischen Rechnung ergeben. Eine Abschätzung des Konvergenzintervalles dieser Oberreihen ergibt den Konvergenzradius

$$\bar{X}_1 \lessapprox 5 \cdot 10^{-4} \tag{19}$$

mit

$$\bar{X}_1 = \frac{x}{D\,\dfrac{U_0 D}{\nu}} = \frac{x}{D\,Re_D},$$

worin D der hydrodynamisch gleichwertige Durchmesser ist, der beim Rohr $2\,s$ und beim ebenen Spalt $4\,s$ beträgt. Der Wert (19) ist für das Strömungs- und Temperaturfeld des Rohres und des ebenen Spaltes gültig. An der Stelle $X_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ beträgt die Geschwindigkeit der Potentialströmung etwa $1{,}15 \cdot U_0$.

6. Asymptotische Lösung für das Geschwindigkeitsfeld. Die bisherige Lösung konvergiert nur für kleine Werte der Lauflänge $X \lessapprox X_1$. Zur Berechnung der Geschwindigkeits- und der Temperaturverteilung für große Werte X wurde eine Entwicklung von der ausgebildeten Poiseuilleschen Parabel und von der konstanten Endtemperatur aus angesetzt. Ausgehend von einer älteren Arbeit von *J. Boussinesq*[2] führte bereits *H. Schlichting*[3] eine solche Rechnung für das Geschwindigkeitsfeld der Strömung im ebenen Spalt aus. *B. Punnis*[4] berechnete nach den gleichen Methoden das Geschwindigkeitsfeld der Rohrströmung. Er gibt den Ausdruck

$$\begin{aligned} U(X, R) = 2\,[(1 - R^2) &+ c_1\, e^{-\bar{\lambda}_1 X}\, \bar{R}_1'(R) + c_1^2\, e^{-2\bar{\lambda}_1 X}\, \bar{R}_2'(R) \\ &+ c_1^3\, e^{-3\bar{\lambda}_1 X}\, \bar{R}_3'(R) + c_2\, e^{-\bar{\lambda}_2 X}\, \bar{R}_1^{*\prime}(R) + \ldots] \end{aligned} \tag{20}$$

an mit

$$c_1 = 2{,}242, \quad c_2 = -0{,}595 \quad \text{und} \quad \bar{\lambda}_1 = 16{,}0397, \quad \bar{\lambda}_2 = 47{,}844,$$

der in der vorliegenden Arbeit übernommen wurde. In Gleichung (20) ist $R = 1 - Y$ die dimensionslose Koordinate senkrecht zur Strömungsrichtung, die von der Rohrachse aus gerechnet wird. Die Funktionen $\bar{R}_n'(R)$ $(n = 1, 2, 3)$ und $\bar{R}_1^{*\prime}(R)$ wurden von *B. Punnis*[4] vertafelt.

---

[1] siehe Fußnote 5 von S. 179.
[2] *J. Boussinesq*, Journ. Math. pur. et appl. 13 (1868), S. 377.
[3] *H. Schlichting*, Z. angew. Math. Mech. 14 (1934), S. 368.
[4] siehe Fußnote 4, von S 179.

Für die vorliegende Arbeit erwies es sich als zweckmäßig, die Rechnungen von *H. Schlichting*[1] zu erweitern. Es sei jedoch nur das Ergebnis der Rechnungen mitgeteilt. Die Geschwindigkeitsverteilung im ebenen Spalt wurde ermittelt zu

$$U(X, R) = \frac{3}{2}(1 - R^2) + c_1 e^{-\bar{\lambda}_1 X} \bar{S}_1'(R) + c_1^2 e^{-2\bar{\lambda}_1 X} \bar{S}_2'(R) + \ldots \tag{21}$$

mit $c_1 = -0{,}2881$, $c_2 = 0{,}083$ und $\bar{\lambda}_1 = 18{,}7441$. Hierin ist $R = 1 - Y$ wiederum dimensionslose Koordinate senkrecht zur Strömungsrichtung, die von der Symmetrieebene des ebenen Spaltes aus gerechnet wird. Die Funktionen $\bar{S}_1'(R)$ und $\bar{S}_2'(R)$ sind in der Dissertation der Verfassers[2] vertafelt.

7. Asymptotische Lösung für das Temperaturfeld. Zur Ermittlung des Temperaturfeldes der Rohrströmung muß man für große Werte X von der rotationssymmetrischen Form der *Fourier*schen Energiegleichung ausgehen, weil für große Werte X die Grenzschichtdicke nicht mehr vernachlässigbar klein ist gegenüber dem Krümmungsradius der Rohrwand. Die *Fourier*sche Energiegleichung lautet dann mit den in der vorliegenden Arbeit benutzten dimensionslosen Größen

$$U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial R} = \frac{1}{Pr}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial T}{\partial R}\right). \tag{22}$$

Für die Temperaturverteilung macht man den Ansatz

$$T(X, R) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu_n X} \vartheta_n(R), \tag{23}$$

worin die μ_n noch näher zu bestimmende Konstanten sind. Den Ansatz (23) sowie Gleichung (20) setzt man in die *Fourier*sche Energiegleichung (22) ein und nimmt die entsprechenden Differentiationen vor. Durch Koeffizientenvergleich erhält man für die Glieder, welche den Faktor $e^{-\mu_0 X}$ enthalten, den Ausdruck

$$\vartheta_0'' + \frac{1}{R}\vartheta_0' + 2\mu_0 Pr (1 - R^2)\vartheta_0 = 0, \tag{24}$$

der für die Randbedingungen $\vartheta_0(R = \pm 1) = 0$ zu lösen ist. Gleichung (24) tritt bei der Berechnung einer thermischen Einlaufströmung auf, deren Geschwindigkeitsprofil eine *Poiseuille*sche Parabel ist. Sie wurde zuerst von *L. Graetz*[3] und später von *W. Nußelt*[4] gelöst. Als Lösung ergibt sich eine Eigenfunktion $\vartheta_0(\beta_i, R)$ mit

$$\beta_i^2 = 2\, Pr\, \mu_{0i} = 2\, Pr\, \bar{\mu}_i \quad (i = 0, 1, 2 \ldots).$$

Die Eigenwerte β_i wurden außer von *L. Graetz*[3] und *W. Nußelt*[5] noch von einigen anderen Autoren ermittelt[5,6,7].

Sehr genaue Rechnungen stammen von *J. Schenk* und *J. M. Dumoré*[7]. Sie errechneten die Werte

$$\beta_0 = 2{,}70437, \qquad \beta_1 = 6{,}6790,$$
$$\beta_2 = 10{,}6733, \qquad \beta_3 = 14{,}6711.$$

Für große Eigenwerte β_i gilt die Näherungsformel von *H. A. Lauwerier*[8] sowie von *J. Sellars, M. Tribus* und *J. Klein*[5]

$$\beta_i = 4\, i + \frac{8}{3}.$$

Ein geschlossener Ausdruck für die Eigenfunktionen $\vartheta_0(\beta_i, R)$ läßt sich nicht bestimmen. Man kann sie jedoch in Form einer Potenzreihe angeben. Paßt man diese den Randbedingungen an, so ergibt sich

$$\vartheta_0(\beta_i, R) = B_i \bar{\vartheta}_0(\beta_i, R).$$

---

[1] siehe Fußnote 3 von S. 181.
[2] siehe Fußnote 5 von S. 179.
[3] *L. Graetz*, Ann. Phys. 18 (1883) S. 79 u. 25 (1885), S. 337.
[4] *W. Nußelt*, ZVDI 54 (1910) S. 1154.
[5] *J. Sellars, M. Tribus* u. *J. Klein*, WADC Technical Report 54—225, Michigan Univ.
[6] *Th. M. Drew*, Amer. Inst. Chem. Eng. 26 (1931), S. 26.
[7] *J. Schenk* u. *J. M. Dumoré*, Appl. Sci. Res. 4 (1953), S. 39.
[8] *H. A. Lauwerier*, Appl. Sci. Res. A 3 (1953), S. 58.

Die noch freien Konstanten B_i sind so zu ermitteln, daß $T(X=0, R)=1$ erfüllt wird. Das ist gleichbedeutend mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n(R) = 0 .$$

Zur Berechnung der Glieder $\vartheta_1(R)$, $\vartheta_2(R)$, ... geht man so vor: In der *Fourier*schen Energiegleichung (22) in welche die Ansätze (20) und (23) eingesetzt wurden, tritt die Exponentenfunktion e^{-kX} mit folgenden Exponenten k auf:

$$\left.\begin{array}{llll} \mu_0 , & & & \\ \mu_1 , & \mu_0 + \lambda_1 , & & \\ \mu_2 , & \mu_1 + \lambda_1 , & \mu_0 + 2\lambda_1 , & \\ \mu_3 , & \mu_2 + \lambda_1 , & \mu_1 + 2\lambda_1 , & \mu_0 + 3\lambda_1 , \\ \ldots & . & & \end{array}\right\} \qquad (25)$$

An Stelle von λ_1 sind dabei die Werte $\bar{\lambda}_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) und an Stelle von μ_0 die Werte $\bar{\mu}_i$ ($i = 0, 1, 2 \ldots$) zu setzen.

Über die Exponenten (25) verfügt man nun in der Weise, daß die in jeder Zeile stehenden Werte einander gleich gesetzt werden. Durch diese Festsetzung ist es möglich, die *Fourier*sche Energiegleichung in ein System von unendlich vielen gewöhnlichen Differentialgleichungen zu verwandeln, aus dem sich die noch unbekannten Funktionen $\vartheta_1(R)$, $\vartheta_2(R)$, ... berechnen lassen. Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich die Gleichungen

$$\vartheta_1'' + \frac{1}{R}\vartheta_1' + 2\mu_1 Pr (1 - R^2)\vartheta_1 = -2\mu_0 Pr R_1' \vartheta_0 + 2\lambda_1 Pr \frac{1}{R} R_1 \vartheta_0' , \qquad (26)$$

$$\vartheta_2'' + \frac{1}{R}\vartheta_2' + 2\mu_2 Pr (1 - R^2)\vartheta_2 = -2\mu_1 Pr R_1' \vartheta_1 + 2\lambda_1 Pr \frac{1}{R} R_1 \vartheta_1' - 2\mu_0 Pr R_1'' \vartheta_0 + 4\lambda_1 Pr \frac{1}{R} R_2 \vartheta_0' \qquad (27)$$

. . . . .

Die Randbedingungen sind

1) $\vartheta_n (R = \pm 1) = 0$,

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \vartheta_n (R) = 1$.

In Gleichung (26) und (27) ist $R_1 = c_n \bar{R}_1$ und $R_2 = c_n^2 \bar{R}_2$. Schreibt man $\vartheta_1 = c_n B_i \bar{\vartheta}_1$ und $\vartheta_2 = c_n^2 B_i \bar{\vartheta}_2$, so kann man die Konstanten c_n und B_i kürzen. Die Funktionen $\bar{\vartheta}_1$ und $\bar{\vartheta}_2$ lassen sich durch Potenzreihenansätze ermitteln. Die noch freien Konstanten B_i bestimmt man so, daß das Temperaturprofil $T(X, Y)$ der Entwicklung von vorn im Sinne des kleinsten Fehlerquadrates möglichst gut mit dem Temperaturprofil $T(X, R)$ der Entwicklung von hinten übereinstimmt. Es soll also an einer Stelle $X = \bar{X}_1$, zum Beispiel $\bar{X}_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ nach Gleichung (19), gelten

$$\frac{\partial}{\partial B_0} \int_0^1 \left[T(\bar{X}_1, R) - T(\bar{X}_1, Y)\right]^2 dR = 0 , \qquad (28)$$

$$\frac{\partial}{\partial B_1} \int_0^1 \left[T(\bar{X}_1, R) - T(\bar{X}_1, Y)\right]^2 dR = 0 , \qquad (29)$$

Mit den hieraus errechneten Werten B_0, B_1, ... läßt sich die Temperaturverteilung anschreiben. Man erhält für die Temperaturverteilung Ausdrücke von der Form

$$T(X, R, Pr) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (Pr)\, e^{-k_n (Pr) X}\, \Theta_n (R, Pr) . \qquad (30)$$

Die Konstanten $C_n(Pr)$, $k_n(Pr)$ sowie die Funktionen $\Theta_n(R, Pr)$ sind in der Dissertation des Verfassers[1] vertafelt.

[1] siehe Fußnote 5 von S. 179.

Zur Berechnung der Temperaturverteilung im ebenen Spalt geht man genau so vor wie bei der Rohrströmung. Man hat lediglich die *Fourier*sche Energiegleichung für die ebene Strömung (3) zu benutzen. Das Ergebnis läßt sich wiederum in Form der Gleichung (30) angeben, deren Werte $C_n(Pr)$, $k_n(Pr)$ und $\Theta_n(R, Pr)$ ebenfalls in der Dissertation des Verfassers[1] vertafelt sind.

Mit diesen Ergebnissen können das Geschwindigkeits- und das Temperaturfeld graphisch dargestellt werden. Abb. 1 zeigt das Geschwindigkeitsfeld des ebenen Spaltes, Abb. 2 das Temperaturfeld für $Pr = 1$. Zum Vergleich sind in Abb. 2 noch einige Temperaturprofile für $Pr \neq 1$ eingezeichnet.

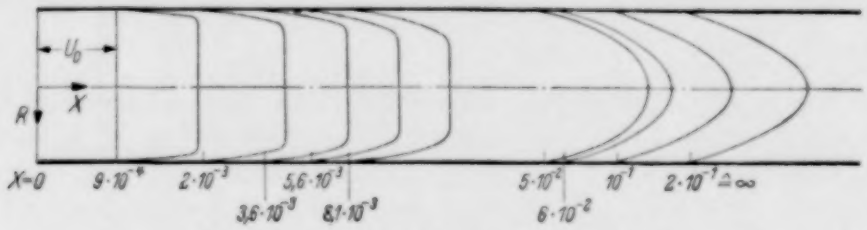


Abb. 1. Geschwindigkeitsverteilung im ebenen Spalt.

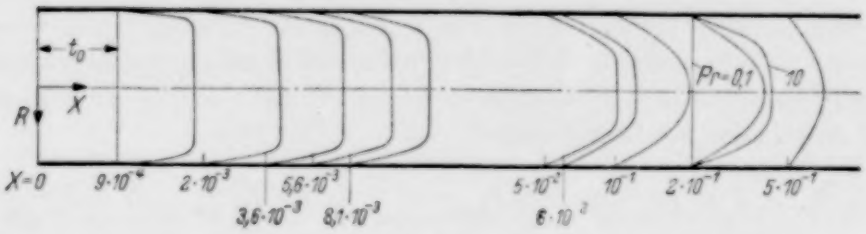


Abb. 2. Temperaturverteilung im ebenen Spalt. $Pr = 1$ (0,1; 10).

Damit ist die Berechnung des Geschwindigkeits- und die des Temperaturfeldes abgeschlossen. Als wichtiges Resultat ergibt sich: Ganz vorn im Einlauf werden die Geschwindigkeits- und die Temperaturverteilung hinreichend genau durch die Gleichungen der längsangeströmten ebenen Platte geschrieben. In großer Entfernung vom Eintrittsquerschnitt, wo die *Poiseuille*sche Parabel praktisch ausgebildet ist, gehorcht die Temperaturverteilung der *Graetz-Nußelt*-Lösung.

8. Berechnung des Druckabfalles. Die Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung gestattet die Berechnung des Druckabfalles. Solange man von einer Potentialströmung sprechen kann, ergibt sich der Druckabfall aus der *Bernoulli*schen Gleichung

$$-\frac{\Delta p}{\varrho \frac{U_0^2}{2}} = U_\delta^2 (X = L) - 1 \tag{31}$$

mit $\Delta p = p(X = L) - p(X = 0)$.

Aus der Beziehung (6) für die Potentialströmung ergibt sich

$$-\frac{\Delta p}{\varrho \frac{U_0^2}{2}} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \overline{X}^{\frac{i}{2}} \tag{32}$$

mit $\overline{X} = \frac{x}{D \frac{U_0 D}{\nu}}$. Dabei ist D der hydrodynamisch gleichwertige Durchmesser. Es ergaben sich folgende Werte a_i:

	a_1	a_2	a_3	a_4
ebener Spalt	+ 13,766	— 24,379	+ 2043,5	— 87952
Rohr	+ 13,766	— 59,299	+ 2565,1	— 136515

Eine Abschätzung des Konvergenzradius der Potenzreihe (32) ergibt:

$$\overline{X}_1 \lessapprox 5 \cdot 10^{-4}.$$

[1] s. Fußnote 5 von S. 179.

Für große Werte der Lauflänge geht das Geschwindigkeitsprofil asymptotisch in die *Poiseuille*sche Parabel über. Dementsprechend gehen auch die Werte für den Druckabfall in die Asymptote

$$-\frac{\Delta p}{\varrho \frac{U_0^2}{2}} = a\,\overline{X} + b \tag{33}$$

über mit der Konstanten a und der Konstanten b, die den zusätzlichen Druckabfall einer hydrodynamisch nicht ausgebildeten Strömung gegenüber der ausgebildeten Strömung angibt.

Die numerische Rechnung ergibt für den ebenen Spalt $a = 96$, $b = 0{,}64$ und für das Rohr $a = 64$, $b = 0{,}87$. Den Wert $b = 0{,}87$ berechnete *B. Punnis* [1].

9. Berechnung der Wärmeübergangszahlen. Um einen Vergleich mit anderen Wärmeübergangsproblemen zu ermöglichen ist es üblich, rein formal die sogenannte *Nußelt*-Zahl einzuführen, die wir für die *Prandtl*-Zahlen 0,1; 1; 10; 100; 1000 berechnen können. Für alle übrigen *Prandtl*-Zahlen in dem Intervall $0{,}1 < Pr < 1000$ erhält man die *Nußelt*-Zahlen durch Interpolation.

Die mittlere Wärmeübergangszahl $\bar{\alpha}(x)$, die ein Maß ist für die bis zu einer Stelle $x = L$ übertragene Wärmemenge werde definiert durch

$$\bar{\alpha}(x)\,\overline{t_m}(x)\,f = U_0\,F\,\varrho\,c_p\,[t_0 - t_m(x)]\,.$$

Hierin ist $\overline{t_m}(x)$ die mittlere logarithmische Temperaturdifferenz

$$\overline{t_m}(x) = \frac{(t_0 - t_w) - (t_m - t_w)}{\ln \frac{t_0 - t_w}{t_m - t_w}}$$

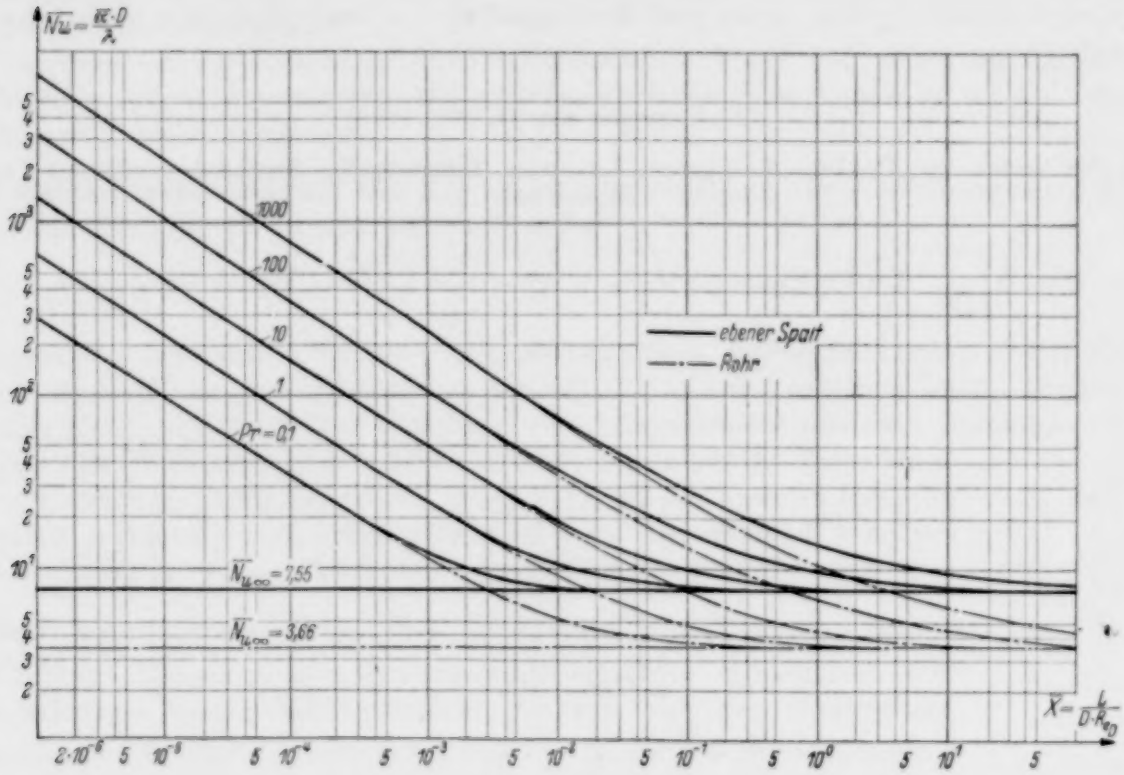


Abb. 3. Mittlere *Nußelt*-Zahl

mit der mittleren Flüssigkeitstemperatur

$$t_m(x) = \frac{1}{\dot{V}} \int_{r=0}^{r=s} t(x, r)\;\; u(x, r)\, dF(r)\,. \tag{34}$$

Hier ist F die Fläche des Kanalquerschnittes und $\dot{V}$ das in der Zeiteinheit durch den Querschnitt strömende Volum. Ferner ist f die zwischen $x = 0$ und $x = L$ wärmeübertragende Wandfläche.

[1] Siehe Fußnote 4 von S. 179.

Mit den bereits in Abschnitt 3 definierten dimensionslosen Größen ergibt sich aus Gleichung (33) die mittlere *Nußelt*-Zahl

$$\overline{Nu}(\overline{X}) = \frac{\bar{\alpha}(\overline{X})\, D}{\lambda} = -\frac{Pr}{4\,\overline{X}} \ln T_m(\overline{X}) . \tag{35}$$

Da die Geschwindigkeits- und die Temperaturverteilungen bekannt sind, kann man $t_m(x)$ nach Gleichung (34) und damit auch $T_m(\overline{X})$ und $\overline{Nu}(\overline{X})$ berechnen. Man gelangt zu folgendem Ergebnis:

Die *Nußelt*-Zahl nimmt am Eintrittsquerschnitt unendlich große Werte an. Mit zunehmender Lauflänge X nimmt sie ab und nähert sich für $X \to \infty$ einem Grenzwert $\overline{Nu}_\infty$. Dieser ist unabhängig von der *Prandtl*-Zahl und beträgt für die Strömung im ebenen Spalt $\overline{Nu}_\infty = 7{,}55$ und für die Rohrströmung $\overline{Nu}_\infty = 3{,}66$. Beide Werte sind von mehreren Autoren[1,2,3] gut bestätigt.

Abb. 3 zeigt den beschriebenen charakteristischen Verlauf für die *Nußelt*-Zahl.

10. Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit wurden Wärmeübergang und Druckabfall nichtausgebildeter Laminarströmung in Rohren und ebenen Kanälen berechnet. Hierzu wurden exakte Methoden der Grenzschichttheorie, wie sie zur Berechnung der Geschwindigkeitsverteilung üblich sind, auf die Berechnung der Temperaturverteilung übertragen. Diese Methoden bestehen darin, daß man eine „Entwicklung von vorn" ansetzt, die vom Eintrittsquerschnitt an gültig ist, und eine „Entwicklung von hinten", die in größerer Entfernung vom Eintrittsquerschnitt an gilt. In dem Bereich, wo weder die Entwicklung von vorn noch die Entwicklung von hinten gültig sind, weil nicht genügend Glieder zur Verfügung stehen, erzielt man durch Interpolation brauchbare Ergebnisse. Die in der Arbeit beschriebenen Methoden sind auch geeignet, den Wärmeübergang und Druckabfall in Ringspalten zu berechnen. Das wird jedoch eine erhebliche Rechenarbeit erfordern, weil als weiterer Parameter noch das Verhältnis der Radien des inneren und des äußeren Rohres auftritt.

(Eingegangen am 24. Juli 1959)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *K. Stephan*, Karlsruhe, Lehrstuhl für Thermodynamik der Technischen Hochschule.

[1] *H. Hahnemann*, Wärme- und Kältetechn. 44 (1942), S. 167; Forsch. Ing.-Wesen 18 (1952), S. 25.
[2] *K. Elser*, Schweiz. Bauz. 69 (1951), S. 641.
[3] *E. Eckert*, Introduction to the transfer of heat and mass, S. 100, New York 1950.

Integralgleichungen gerader Kippträger mit dünnwandigen, offenen und quasi-wölbfreien Profilen

Von L. Kraus

1. Einleitung. Für die von *Chwalla*[1] aufgestellte komplizierte Differentialgleichung für das Kippen des geraden Trägers mit dünnwandigem, einfachsymmetrischem offenem Profil liegen Lösungen in verschiedener Form vor. *Meissner*[2] berechnet mit dem Energieverfahren die Kippzahlen von Trägern auf zwei Stützen unter Gleichstreckenlast, mit einem Endmoment und mit zwei gegengleichen Endmomenten. In einer umfassenden Abhandlung liefert *Pettersson*[3] Lösungen der Kippdifferentialgleichungen mit Hilfe von Potenzreihen bei linearem Verlauf der Kippmomente; er behandelt den Träger auf zwei Stützen mit einer Einzellast in Trägermitte ohne und mit gegengleichen Endmomenten, ferner den Träger mit einem Einzelmoment am Trägerende, und symmetrische Durchlaufträger auf vier Stützen mit einer Einzellast in der Mitte des Mittelfeldes. Außer der Energiemethode und der Lösung mit einem Potenzreihenansatz läßt sich auch das Differenzenverfahren verwenden. Hier soll der Versuch unternommen werden, das Kipp-Problem des einfachsymmetrischen Querschnittes mit Hilfe der für die numerische Rechnung bequemen Integralgleichungen zu lösen. Für Träger mit einfach-symmetrischen Profilen gelingt es jedoch nur bei bestimmten Querschnittsformen und Belastungen, die Integralgleichungen mit Hilfe von bekannten Funktionen auszudrücken. Es ist dies der Träger mit quasi-wölbfreiem Querschnitt (T-, Winkel- oder Kreuzprofil mit Wölbwiderstand $C_M = 0$), wenn zugleich das Biegemoment einen linearen oder quadratischen Verlauf hat.

Im folgenden werden die Integralgleichungen für solche Träger angegeben und für ein bestimmtes T-Profil numerisch ausgewertet. Die berechneten Kippzahlen werden in der Gestalt von Diagrammen und Tabellen mitgeteilt.

2. Kippdifferentialgleichung. Die Kippdifferentialgleichung für einfachsymmetrische Profile[4] lautet in den dimensionslosen Koordinaten ϑ und s:

$$-\frac{C_M}{D\,l^2}\,\vartheta^{\mathrm{IV}} + \{[1 + \Phi\,\beta\,\lambda\,M(s)]\,\vartheta'\}' + \lambda^2\left[M^2(s) + \varrho\,\beta\,p\sqrt{B\,D}\,\frac{l}{M_0^2}\right]\vartheta = 0\,. \qquad (1)$$

Es bedeuten C_M den auf den Schubmittelpunkt bezogenen Wölbwiderstand [kpcm⁴], B die Biegesteifigkeit für die Minimumsträgheitsachse [kpcm²], D die de St. Venantsche Drillsteifigkeit [kpcm²], l die Trägerlänge [cm], ϑ den Drillwinkel und z die Längenkoordinate [cm], deren Achse die Trägerschwerachse ist. Weiterhin ist $s = z/l$ die dimensionslose auf die Trägerlänge bezogene Koordinate, h die Trägerhöhe [cm], $v = \varrho\,h/2$ der Abstand [cm] der Streckenlast p [kp/cm] vom Schubmittelpunkt, y_M der Abstand [cm] des Schubmittelpunktes vom Schwerpunkt und $\psi = \int_F y\,r^2\,dF/J_x$ eine dem Querschnitt eigentümliche Länge (Abb. 1). Es sind $\Phi = 2\,(2\,y_M - \psi)/h$ und $\beta = h\sqrt{B/D}\,/2\,l$ dimensionslose Querschnittskenngrößen. Schließlich stellt M_0 ein beliebiges Vergleichsbiegemoment [kp cm], $M(s)$ den qualitativen, dimensionslosen Verlauf des Momentes und $\lambda = M_0\,l/\sqrt{B\,D}$ den dimensionslosen Eigenwert dar. Striche bedeuten Ableitungen nach s. Seitliche Biegemomente, deren Vektoren mit der Achse für das kleinere Trägheitsmoment zusammenfallen, sind in der Differentialgleichung weggelassen.

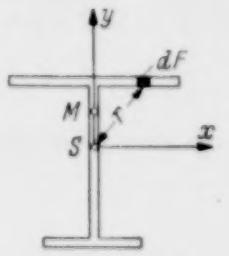


Abb. 1. Das einfach-symmetrische I-Profil (Bedeutung der Buchstaben siehe Text).

Um von der Differentialgleichung (1) zu Integralgleichungen zu gelangen, schlagen wir denselben Weg ein wie früher[5]. Doch zeigt es sich, daß die dabei auftretende homogene Gleichung

$$L(u) = -\frac{C_M}{D\,l^2}\,u^{\mathrm{IV}} + \{[1 + \Phi\,\beta\,\lambda\,M(s)]\,u'\}' = 0 \qquad (2)$$

[1] *E. Chwalla*, Sitz. Ber. Akad. Wiss. Wien, mathem.-naturw. Kl. Abt. IIa, 153 (1944), S. 25.
[2] *F. Meissner*, Diss. d. Deutschen Technischen Hochschule Brünn 1944 und Stahlbau 28 (1955).
[3] *O. Pettersson*, Bull. Nr. 10 from The Div. of Building Statics and Struct. Eng. at the Royal Inst. of Techn., Stockholm.
[4] siehe Fußnote 1 und 3.
[5] *L. Kraus*, Ing.-Arch. 26 (1958), S. 1.

nur in besonderen Fällen geschlossen lösbar ist. Von der Lösung durch Potenzreihen soll abgesehen werden; denn dann ist es schon zweckmäßiger, gleich die vollständige Differentialgleichung (1) so zu behandeln. Setzen wir jedoch $C_M = 0$ und nehmen wir für $M(s)$ einen linearen bzw. quadratischen Verlauf an, so drücken sich die Lösungen von (2) durch ln- bzw. Ar Tg- und arctg-Funktionen aus. Bezüglich des Biegemomentes hat man damit die baustatisch interessanten Fälle eingefangen. Was die Querschnitte anbetrifft, schlagen wir vor, sich einer zeichnerischen Näherung zu bedienen. Mit Hilfe der im folgenden entwickelten Integralgleichungen lassen sich die Kippzahlen für T-Profile berechnen. Für den entsprechenden doppelt-symmetrischen I-Querschnitt sind sie entweder bekannt, oder sie können auf dieselbe Art ermittelt werden. Trägt man diese Kippwerte über dem Verhältnis der Flanschbreiten auf und verbindet man die Punkte durch eine Kurve (Abb. 2), so erhält man Näherungswerte für die sich dazwischen einordnenden Profile.

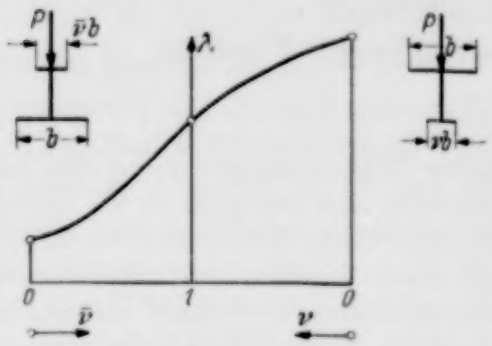


Abb. 2. Die Kippwerte über dem Verhältnis der Flanschbreiten.

Die Integralgleichungen für das T-Profil lassen sich auch auf mechanischem Wege herleiten. Hierfür betrachte man einen Ersatzträger mit der veränderlichen Drillsteifigkeit $D(s) = D_0 [1 + \varkappa M(s)]$ unter der Wirkung eines Einzeltorsionsmomentes $\overline{M} = 1$ an der Stelle $z = l\,t$ und berechne die Lösung für $\bar{\vartheta}(s, t)$ in den beiden Bereichen $0 \leqq s \leqq t$ und $t \leqq s \leqq 1$. Die zur expliziten Lösung von $\bar{\vartheta}$ nötigen vier Bedingungen liefern die beiden dem Kippträger zugeordneten Randbedingungen und zwei Übergangsbedingungen bei $s = t$ (Gleichheit von $\bar{\vartheta}$ und eine Sprungbedingung, die über die Größen der durch $\overline{M}$ in beiden Bereichen erzeugten Torsionsmomente Aufschluß gibt). Die Randbedingungen lassen sich als Bedingungen für eine starre oder elastische Torsionseinspannung oder für ein freies Ende auffassen. Den mit λ^2 und ϑ behafteten Ausdruck in (1) denke man sich als eine über den Träger veränderliche Torsionsstreckenbelastung $m(s)$. Der Drillwinkel ϑ, den $m(t)$ an der Stelle s erzeugt, hat die Form

$$\vartheta(s) = \int_0^1 \bar{\vartheta}(s, t)\, m(t)\, dt\,.$$

Damit ist das Problem in der Gestalt einer Integralgleichung gegeben.

3. Integralgleichungen bei linearem Verlauf des Biegemomentes. Wir setzen $C_M = p = 0$ und $M(z) = M_0 s$. Es ist M_0 das Biegemoment am Ende des Integrationsbereiches. Damit ergibt sich mit $\varkappa = \Phi\,\beta\,\lambda$ aus (2)

$$[(1 + \varkappa s)\,\vartheta']' = -\lambda^2 s^2\,\vartheta\,. \tag{3}$$

Nach dem Verfahren von *Lagrange* erhalten wir daraus die Integralgleichung

$$\vartheta(s) = \frac{\lambda^2}{\varkappa} \int_0^s \left[\ln \frac{1 + \varkappa t}{1 + \varkappa s}\right] t^2\,\vartheta(t)\,dt + \ln(1 + \varkappa s)\,C_1 + C_2\,. \tag{4}$$

Ihre Ableitung nach s lautet

$$\vartheta'(s) = -\lambda^2 \int_0^s \frac{t^2\,\vartheta(t)\,dt}{1 + \varkappa s} + \frac{C_1 \varkappa}{1 + \varkappa s}\,. \tag{5}$$

Mit (4) und (5) werden wir einige Lastfälle behandeln.

a) Der Kragträger. Es sei P die Kipplast am freien Ende des Trägers und $v = \varrho\,h/2$ ihr Abstand vom Schubmittelpunkt. Da P im Flansch Zugspannungen erzeugt[1], muß das Biegemoment das negative Vorzeichen erhalten. In (3), (4) und (5) ist also $\varkappa$ durch $-\varkappa$ zu ersetzen.

[1] siehe Fußnote 1 von S. 187.

Mit den Randbedingungen $-\vartheta'(0) = \lambda\,\beta\,\varrho\,\vartheta(0)$ und $\vartheta(1) = 0$ erhalten wir dann nach einer kurzen Rechnung

$$\vartheta(s) = \frac{\lambda^2}{\varkappa\left[1 + \frac{\varrho}{\Phi}\ln(1-\varkappa)\right]}\left\{\int_0^s \left[1 + \frac{\varrho}{\Phi}\ln(1-\varkappa t)\right]\left[\ln\frac{1-\varkappa s}{1-\varkappa}\right] t^2\,\vartheta(t)\,dt + \int_s^1 \left[1 + \frac{\varrho}{\Phi}\ln(1-\varkappa s)\right]\left[\ln\frac{1-\varkappa t}{1-\varkappa}\right] t^2\,\vartheta(t)\,dt\right\}. \tag{6}$$

Bei umgedrehtem Profil wechselt λ in (6) das Vorzeichen. Die Zuordnung der Vorzeichen ist in Abb. 3 dargestellt.

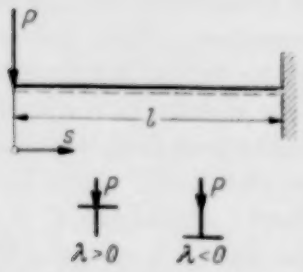


Abb. 3. Die Zuordnung der Vorzeichen von λ beim Kragträger mit einer Einzellast am freien Trägerende.

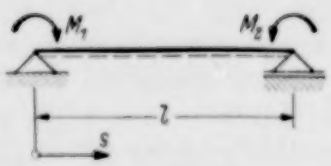


Abb. 4. Systemskizze für den Träger auf zwei Stützen mit Endmomenten.

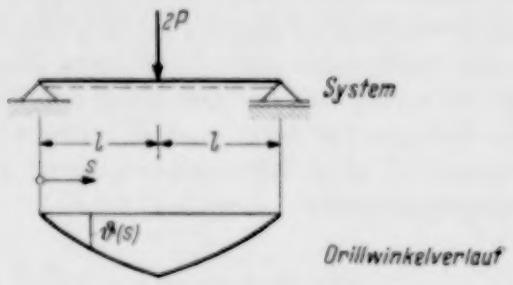


Abb. 5. Der Träger auf zwei Stützen mit einer in der Mitte wirkenden Einzellast.

b) Der Träger auf zwei Stützen mit Endmomenten. Das Biegemoment M lautet mit den Abkürzungen

$$\alpha = \frac{M_1}{M_2} \qquad \text{und} \qquad \lambda = \frac{M_2\,l}{\sqrt{B\,D}}$$

gemäß der Abb. 4

$$M = M_2\,[\alpha + (1-\alpha)\,s] = M_2\,M(s)\,.$$

Statt (3) haben wir

$$\left\{\left[1 + \frac{\varkappa(1-\alpha)}{1+\alpha\varkappa}\,s\right]\vartheta'\right\}' = -\frac{\lambda^2}{1+\alpha\varkappa}\,[\alpha + (1-\alpha)\,s]^2\,\vartheta\,. \tag{3a}$$

Wenn wir $\varkappa(1-\alpha)/(1+\alpha\varkappa) = \bar{\varkappa}$ und $\lambda^2/(1+\alpha\varkappa) = (\bar{\lambda})^2$ setzen, können wir wieder (4) und (5) verwenden. Die Randbedingungen lauten $\vartheta(0) = \vartheta(1) = 0$.
Daraus ergibt sich die Integralgleichung

$$\vartheta(s) = \frac{(\bar{\lambda})^2}{\bar{\varkappa}\ln[1+\bar{\varkappa}]}\left\{\int_0^s \ln(1+\bar{\varkappa}\,t)\left[\ln\frac{1+\bar{\varkappa}}{1+\bar{\varkappa}\,s}\right][\alpha + (1-\alpha)\,t]^2\,\vartheta(t)\,dt + \int_s^1 \ln(1+\bar{\varkappa}\,s)\left[\ln\frac{1+\bar{\varkappa}}{1+\bar{\varkappa}\,t}\right][\alpha + (1-\alpha)\,t]^2\,\vartheta(t)\,dt\right\}. \tag{7}$$

Auch hier wechselt das Vorzeichen von λ, wenn das Profil umgedreht wird.

c) Der Träger auf zwei Stützen mit Einzellast. Gemäß der Abb. 5 ist $M(s) = s$ und $\lambda = Pl^2/\sqrt{B\,D}$. Die Lösung dieses Lastfalles liegt in geschlossener Form vor[1]. Um die Abweichungen von den strengen Werten zu ermitteln, wird dieser Fall mit den Methoden der Integralgleichungen behandelt. Als Randbedingungen werden vorgeschrieben $\vartheta(0) = 0$ und $(1-\varkappa)\times\vartheta'(1) = (\varkappa\,\varrho/\Phi)\,\vartheta(1)$. Aus der letzten Gleichung geht hervor, daß — ähnlich wie beim Rechteckquerschnitt — der Drillwinkel in Trägermitte keine horizontale Tangente hat. Für $\Phi = 0$ ist die zweite Randbedingung mit der entsprechenden Randbedingung des Rechteck-Trägers identisch.

[1] siehe Fußnote 3 von S. 187.

Aus diesen Randbedingungen, sowie aus (4) und (5), bekommen wir die folgende Integralgleichung:

$$\vartheta(s) = \frac{\lambda}{\Phi\,\beta\,[(1-\varkappa)-\varrho\,(1+\varkappa)\ln(1+\varkappa)]}\left\{\int_0^s\left[\Phi\,(1-\varkappa)+\varrho\,(1+\varkappa)\ln\frac{(1+\varkappa\,s)}{(1+\varkappa)}\right]\right.$$

$$\left.\times\,[\ln(1+\varkappa\,t)]\,t^2\,\vartheta(t)\,dt+\int_s^1\left[\Phi(1-\varkappa)+\varrho\,(1+\varkappa)\ln\frac{(1+\varkappa\,t)}{(1+\varkappa)}\right]\cdot[\ln(1+\varkappa\,s)]\,t^2\,\vartheta(t)\,dt\right\}. \qquad (8)$$

Das Vorzeichen von λ und $\varkappa$ wird negativ, falls P im Flansch Zugspannungen erzeugt.

4. Integralgleichungen bei quadratischem Verlauf des Biegemomentes. Wiederum sei $C_M = 0$. Wir beschränken uns auf rein parabolische Biegemomente $M(s) = s^2$ bzw. $M(s) = s\,(1-s)$. Die Integralgleichung baut sich je nach der Wirkungsrichtung der äußeren Kräfte aus $\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}$- oder arctg-Ausdrücken auf. Auch wenn zusätzlich Biegemomente an den Trägerenden wirken, läßt sich die Integralgleichung mit Hilfe der Partialbruchzerlegung finden. Wir geben zuerst die Integralgleichungen für $M(s) = s^2$ an. Der Fall $M(s) = s\,(1-s)$ bzw. $M(s) = 1 - s^2$ läßt sich aus dem ersten Fall ohne Schwierigkeit entwickeln. Für negative λ und $\varkappa$ [in (3b), (4b) und (5a) sind λ und $\varkappa$ dagegen positiv zu zählen] ist also

$$[(1-\varkappa\,s^2)\,\vartheta']' = -\lambda^2\left[s^4+\varrho\,\beta\,p\sqrt{B\,D}\;\frac{l}{M_0^2}\right]\vartheta\,. \qquad (3b)$$

Daraus leitet sich mit der Abkürzung $m(s) = s^4 + \varrho\,\beta\,p\sqrt{B\,D}\,l/M_0^2$ die folgende Integralgleichung her:

$$\vartheta(s) = \frac{\lambda^2}{\sqrt{\varkappa}}\int_0^s[\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}(\sqrt{\varkappa}\,t)-\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}(\sqrt{\varkappa}\,s)]\,m(t)\,\vartheta(t)\,dt + C_1\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}(\sqrt{\varkappa}\,s)+C_2\,. \qquad (4a)$$

Differentiieren von (4a) nach s ergibt

$$\vartheta'(s) = -\lambda^2\int_0^s\frac{m(t)}{(1-\varkappa)s^2}\,\vartheta(t)\,dt + C_1\,\frac{\sqrt{\varkappa}}{(1-\varkappa)s^2}\,. \qquad (5a)$$

Wechseln p, λ und $\varkappa$ das Vorzeichen, dann bekommen wir statt (3b)

$$[(1+\varkappa\,s^2)\,\vartheta']' = -\lambda^2\left[s^4-\varrho\,\beta\,p\sqrt{B\,D}\;\frac{l}{M_0^2}\right]\vartheta\,. \qquad (3c)$$

Daraus erhalten wir mit der Abkürzung $n(s) = s^4 - \varrho\,\beta\,p\sqrt{B\,D}\,l/M_0^2$ die Integralgleichung

$$\vartheta(s) = \frac{\lambda^2}{\sqrt{\varkappa}}\int_0^s[\operatorname{arctg}(\sqrt{\varkappa}\,t)-\operatorname{arctg}(\sqrt{\varkappa}\,s)]\,n(t)\,\vartheta(t)\,dt + C_1\operatorname{arctg}(\sqrt{\varkappa}\,s)+C_2\,. \qquad (4b)$$

Ihre erste Ableitung nach s lautet

$$\vartheta'(s) = -\lambda^2\int_0^s\frac{n(t)}{1+\varkappa s^2}\,\vartheta(t)\,dt + C_1\,\frac{\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa s^2}\,. \qquad (5b)$$

a) Der Kragträger. Wir behandeln den Lastfall Gleichstreckenlast. Es ist $M(z) = -M_0 s^2$ mit $M_0 = p\,l^2/2$. Damit wird $m(s) = s^4 + 2\,\varrho\,\beta/\lambda$ und $n(s) = s^4 - 2\,\varrho\,\beta/\lambda$. Randbedingungen sind $\vartheta'(0) = 0$ und $\vartheta(1) = 0$. Damit ergibt sich aus (4a) und (5a) [Zugspannungen im Flansch] die Integralgleichung

$$\vartheta(s) = \frac{\lambda^2}{\sqrt{\varkappa}}\left\{\int_0^s m(t)\,[\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}(\sqrt{\varkappa})-\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}(\sqrt{\varkappa}\,s)]\,\vartheta(t)\,dt\right.$$

$$\left.+\int_s^1 m(t)\,[\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}(\sqrt{\varkappa})-\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}(\sqrt{\varkappa}\,t)]\,\vartheta(t)\,dt\right\}. \qquad (9)$$

Wirken im Flansch dagegen Druckspannungen, dann bekommen wir die Integralgleichung aus (4b) und (5b). Sie lautet

$$\vartheta(s) = \frac{\lambda^2}{\sqrt{\varkappa}} \left\{ \int_0^s n(t) \left[\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\varkappa}\right) - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\varkappa}\, s\right) \right] \vartheta(t)\, dt + \int_s^1 n(t) \left[\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\varkappa}\right) - \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\varkappa}\, t\right) \right] \vartheta(t)\, dt \right\}. \tag{10}$$

b) Der Träger auf zwei Stützen. Für Gleichstreckenlast $p = 2\,q$ ergibt sich gemäß Abb. 6 das von der Trägermitte aus gezählte Biegemoment zu $M(z) = M_0\,(1 - s^2)$ mit $M_0 = q\,l^2$. Der Drillwinkel verschwindet an den Auflagern und ist zur Trägermitte symmetrisch. Bei positivem M_0, λ, $\varkappa$ und p (Druckspannungen im Flansch) haben wir

$$\left[\left(1 - \frac{\varkappa}{1+\varkappa} s^2\right) \vartheta'\right]' = -\frac{\lambda^2}{1+\varkappa} \left[(1 - s^2)^2 + \frac{2\,\varrho\,\beta}{\lambda} \right] \vartheta\,. \tag{3d}$$

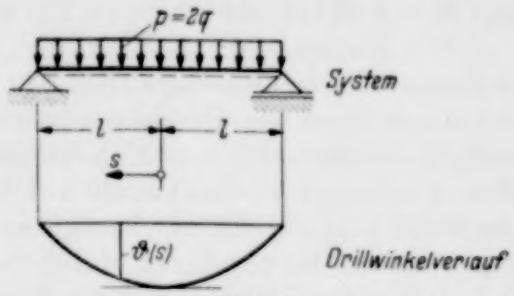


Abb. 6. Der Träger auf zwei Stützen mit Gleichstreckenlast.

Die Randbedingungen stimmen mit denen von Abschnitt 4a überein. Die (3d) zugeordnete Integralgleichung ist mit (9) identisch, wenn dort $\lambda^2/(1+\varkappa)$ statt λ^2 und $\varkappa/(1+\varkappa)$ statt $\varkappa$ und $m(t) = (1-t^2)^2 + 2\,\varrho\,\beta/\lambda$ statt $m(t)$ eingesetzt wird.

In der bei Rechenautomaten üblichen algorithmischen Schreibweise lautet das oben Gesagte wie folgt

$$\left.\begin{aligned} &\text{Igl. für } [(3\text{d});\ \vartheta'(0) = \vartheta(1) = 0] = (9), \\ &\lambda^2/(1+\varkappa) \Rightarrow \lambda^2\,, \\ &\varkappa/(1+\varkappa) \Rightarrow \varkappa\,, \\ &(1-t^2)^2 + 2\,\varrho\,\beta/\lambda \Rightarrow m(t)\,. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Bei Zugspannungen im Flansch wechselt das Vorzeichen von M_0, λ, $\varkappa$ und p in (3d). Statt (3d) gilt

$$\left[\left(1 + \frac{\varkappa}{1-\varkappa} s^2\right) \vartheta'\right]' = -\frac{\lambda^2}{1+\varkappa} \left[(1 - s^2)^2 - \frac{2\,\varrho\,\beta}{\lambda} \right] \vartheta\,, \tag{3e}$$

In (3e) sind λ und $\varkappa$ positiv. Wir schreiben wieder

$$\left.\begin{aligned} &\text{Igl. für } [(3\text{e});\ \vartheta'(0) = \vartheta(1) = 0] = (10)\,, \\ &\lambda^2/(1-\varkappa) \Rightarrow \lambda^2\,, \\ &\varkappa/(1-\varkappa) \Rightarrow \varkappa\,, \\ &(1-t^2)^2 - 2\,\varrho\,\beta/\lambda \Rightarrow m(t)\,. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

5. Numerische Behandlung der hergeleiteten Integralgleichungen. Die in den vorhergehenden Abschnitten aufgestellten Integralgleichungen werden für den Fall $\Phi = 1{,}631176$ numerisch ausgewertet. Dieser Φ-Wert liegt auch den Untersuchungen von *Meissner* und *Pettersson* zugrunde[1], so daß bei zwei Lastfällen gewisse Vergleichsmöglichkeiten bestehen. Die Abmessungen des entsprechenden T-Profiles sind in Abb. 7 eingezeichnet.

Abb. 7. Die Abmessungen des T-Profils.

Zur numerischen Rechnung bringt man die Integralgleichungen durch Umwandlung der Integrale in Summen in die Form von homogenen Gleichungssystemen für ϑ an den äquidistanten Stützstellen s_i. Die Koeffizienten der zugehörigen Matrix enthalten aber den Eigenwert nicht in derselben einfachen Form wie die gewöhnlichen Matrizeneigenwertprobleme. Zur Lösung dienen die beiden folgenden Verfahren. Für gewisse angenommene Größen λ_a werden die Werte der zu dem homogenen Gleichungssystem gehörenden Determinante ΔN mit dem *Gauß*schen Verfahren berechnet. Nach Wahl von drei passenden ΔN-λ_a-Wertepaaren liefert eine quadratische Interpolation näherungsweise den Nulldurchgang der Determinante und den zugehörigen λ-Wert. Dieses Verfahren wird bei 4-reihigen, symmetrischen und unsymmetrischen und bei 8-reihigen symmetrischen Matrizen verwendet. Im Falle unsymmetrischer 8-reihiger Matrizen wird das Verfahren der Matrizen-Eigen-

[1] siehe Fußnoten 2 bzw. 3 von S. 187.

wertbestimmung bei unsymmetrischer Koeffizientenmatrix in abgewandelter Form benutzt. Für Werte λ_a, von denen man annimmt, daß sie in der Nähe des wirklichen Eigenwertes liegen, ermittelt man die unsymmetrische Koeffizientenmatrix $\mathfrak{R}(\lambda_a)$. Damit ist ein spezielles Eigenwertproblem $[\mathfrak{R}(\lambda_a) - \mathfrak{E}/\lambda_b^2]\,\mathfrak{x} = 0$ gegeben, dessen kleinstes λ_b mit dem Matrizeniterationsverfahren[1] berechnet wird. Die aus drei gut liegenden λ_b-λ_a-Wertepaaren gebildete Parabel schneidet die Gerade $\lambda_b = \lambda_a$ im gesuchten Wert λ. Zu jedem λ gehören die zwei Parameter ϱ und β. Für die Zahlenrechnung werden gewählt

$$\varrho = \begin{cases} 0 & \text{(Last } P \text{ oder } p \text{ wirkt im Schubmittelpunkt)}, \\ -0{,}625 & \text{(Last } P \text{ oder } p \text{ wirkt im Schwerpunkt)}, \\ -2 & \text{(Last } P \text{ oder } p \text{ wirkt im freien Ende des Steges)} \end{cases}$$

und $\beta^2 = 0{,}025;\ 0{,}050;\ 0{,}100;\ 0{,}250$ und $0{,}500$.

Die Rechenarbeit besorgt die von der Deutschen Forschungsgemeinschaft bereitgestellte elektronische Rechenanlage IBM 650. Sie führt im Bell-Code die Berechnung, die Elimination und das Ausrechnen des Determinantenwertes einer 4-reihigen Matrix in 15 Sekunden und einer 8-reihigen symmetrischen in 45 Sekunden durch. Die Behandlung einer 8-reihigen unsymmetrischen Matrix verlangt durchschnittlich 4 bis 5 Minuten Rechenzeit. Hier wird lediglich die Integralgleichung (11) mit diesem Verfahren gelöst. Bei der nicht symmetrischen Integralgleichung (9) liegen die aus der 4-reihigen Matrix berechneten Näherungen so nahe an der Grenzhyperbel $\lambda = 1/\Phi\,\beta$, daß in den Fällen $\varrho \neq 0$ die Berechnung der 8-reihigen Matrix unterlassen werden kann. Bei (9) und (11) ist eine Symmetrisierung wegen des durch die negativen ϱ-Werte bedingten Vorzeichenwechsels von $m(t)$ unmöglich. Dieser Prozeß gelingt dagegen bei den mit $n(t)$ behafteten Gleichungen (10) und (12). Es wird gesetzt $q(s) = \vartheta(s)\sqrt{n(s)}$. Die Integralgleichungen (6), (7) und (8) werden nach Einführung von $q(s) = \vartheta(s)\,M(s)$ symmetrisch.

Die λ_a werden zuerst willkürlich gewählt. Bei linearem Momentenverlauf liegen die negativen λ, die im Flansch Zugspannungen hervorrufen, stets unter der Grenzhyperbel $\lambda = 1/\Phi\,\beta$. Dasselbe gilt für die positiven λ von (9) und (12). Weiterhin ist meist $\lambda\,(\beta = 0)$ bekannt. Damit hat man bereits einen guten Anhalt. Mit den schnell rechnenden Programmen für die 4-reihige Matrix bestimmt man für verschiedene λ_a die ΔN-Werte und kommt bald zum Nulldurchgang. Die λ_a-Werte für die 8-reihigen Matrizen werden dann in der Nähe davon angenommen. Für positive λ_a von (6), (7), (8), (10) und (11) bestehen keine Grenzkurven. Es muß solange probiert werden, bis ΔN das Vorzeichen wechselt. Die Form der Eigenfunktion gibt dann Auskunft über die Nummer des Eigenwertes.

Im folgenden Abschnitt 6 sind die berechneten Kippwerte nach Lastfällen in Tabellen zusammengefaßt, und ihr Verlauf ist in Diagrammen dargestellt. Die Abweichung der aus 4- und 8-reihigen Matrizen ermittelten λ voneinander ist nur im Falle des Kragträgers mit Einzellast geringfügig (siehe Abb. 8a und 8b und Tabelle 1a und 1b). Bei den anderen Lastfällen gehen die Kurven für bestimmte ϱ teils wenig, teils aber ganz beträchtlich auseinander (siehe die entsprechenden Tabellen und Kurven des Abschnittes 6). Die Näherungen der 8-reihigen Matrizen liegen nicht immer über denen der 4-reihigen. Bis auf die Kurve $\varrho = -0{,}625$ von (9) [Abb. 11b] hat der Fehler der Abweichung der beiden Näherungen immer dasselbe Vorzeichen.

Um für alle oben behandelten Lastfälle die in Abb. 2 angedeutete Näherungslinie zeichnen zu können, müssen neben den bereits vorliegenden Kippwerten der anderen Lastfälle auch die des Zweistützenträgers mit doppeltsymmetrischem I-Profil unter der Wirkung von zwei voneinander verschiedenen Endmomenten bekannt sein. Deshalb werden dafür schließlich noch Näherungswerte für λ mit Hilfe von 4- und 8-reihigen Matrizen aus der folgenden Integralgleichung[2]

$$\varphi(s) = \lambda^2 \int_0^1 K(s,t)\,\varphi(t)\,dt$$

berechnet. Dabei gilt

$$\left.\begin{aligned} K(s,t) &= \left\{ t\,(1-s) - \frac{\mathfrak{Sin}\,[a\,(1-s)]\ \mathfrak{Sin}\,a\,t}{a\,\mathfrak{Sin}\,a} \right\} M(s)\,M(t) \text{ für } 0 \leqq t \leqq s\,, \\ K(s,t) &= \left\{ s\,(1-t) - \frac{\mathfrak{Sin}\,[a\,(1-t)]\ \mathfrak{Sin}\,a\,s}{a\,\mathfrak{Sin}\,a} \right\} M(t)\,M(s) \text{ für } s = t = 1\,, \\ a &= \frac{1}{\beta}\,, \quad \lambda = \frac{M_2 l}{\sqrt{B\,D}}\,, \quad \alpha = \frac{M_1}{M_2}\,, \quad M(s) = [\alpha + (1-\alpha)\,s] \\ \text{und } \varphi(s) &= \vartheta(s)\,M(s)\,. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

[1] *Zurmühl*, Matrizen, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958.

[2] bzg. deren Herleitung siehe Fußnote 5 von S. 187.

6. Diagramme und Tabellen.

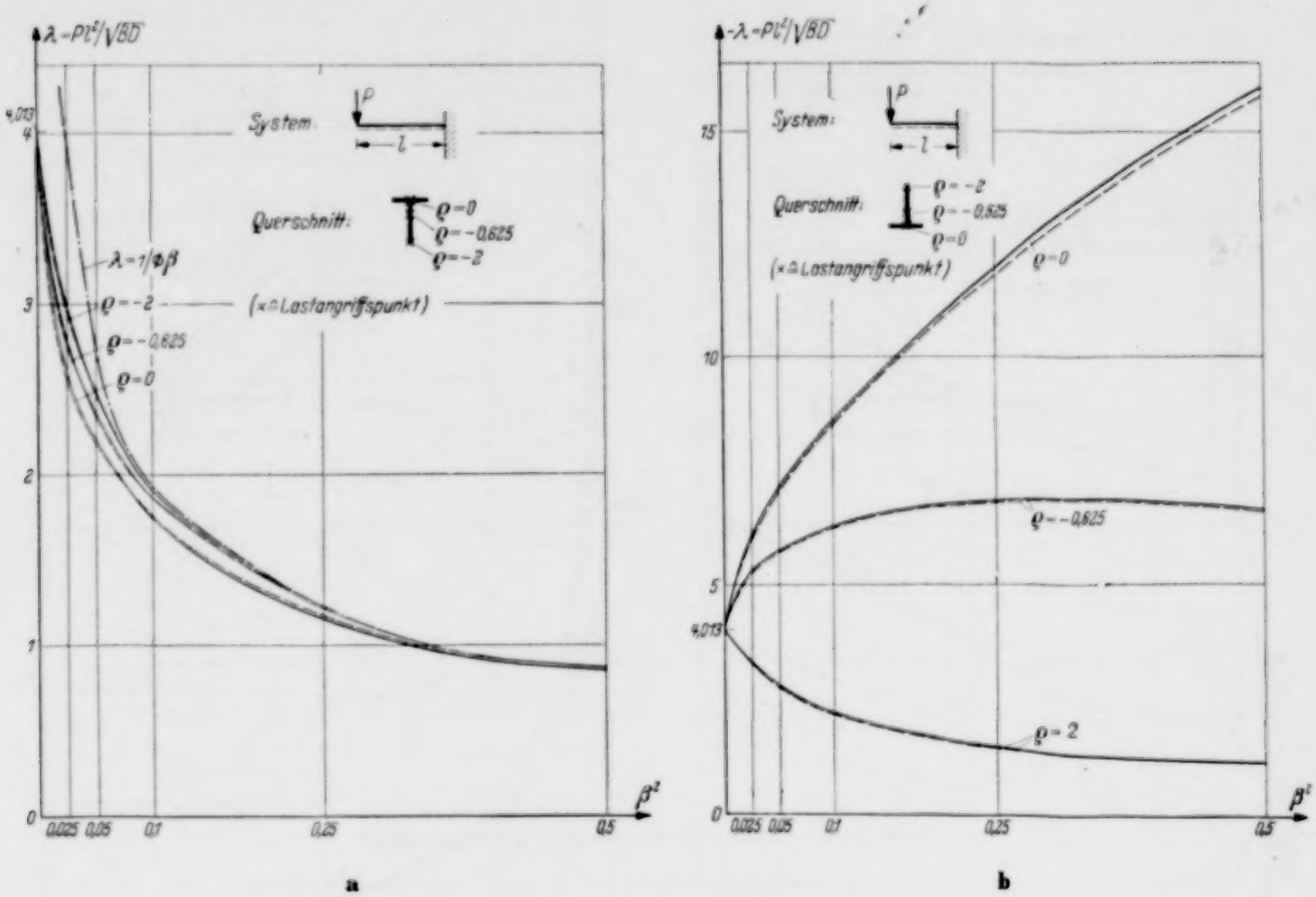


Abb. 8 a und b. Verlauf der aus (6) berechneten Kippwerte λ.

——— λ aus 8-reihiger Matrix; · · · · · · · · · · λ aus 4-reihiger Matrix.

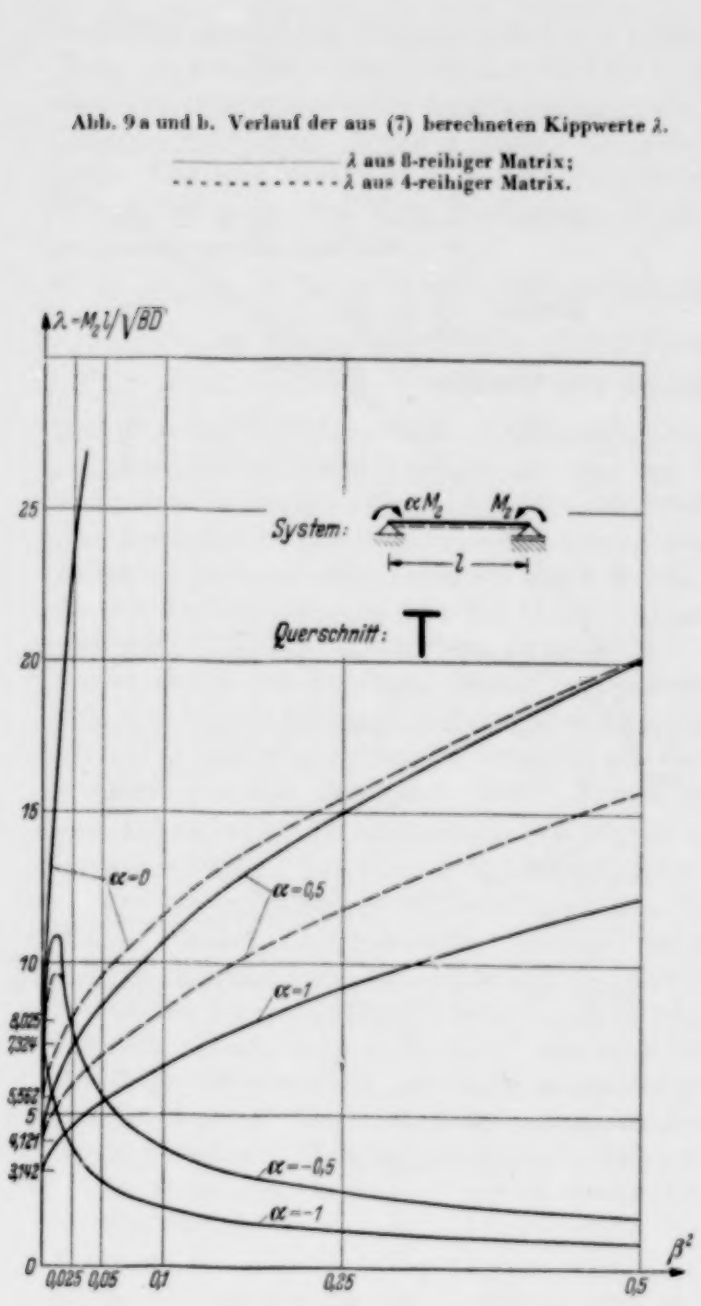
Tabelle 1a. *Zusammenstellung der in Abb. 8a aufgetragenen Kippwerte λ.*

β^2	$\varrho = 0$		$\varrho = -0{,}625$		$\varrho = -2$	
	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix
0,025	2,596	2,605	2,759	2,773	2,963	2,983
0,050	2,195	2,196	2,344	2,345	2,491	2,491
0,100	1,759	1,750	1,862	1,857	1,926	1,902
0,250	1,205	1,187	1,226	1,216	1,226	1,226
0,500	0,867	0,863	0,867	0,867	0,867	0,867

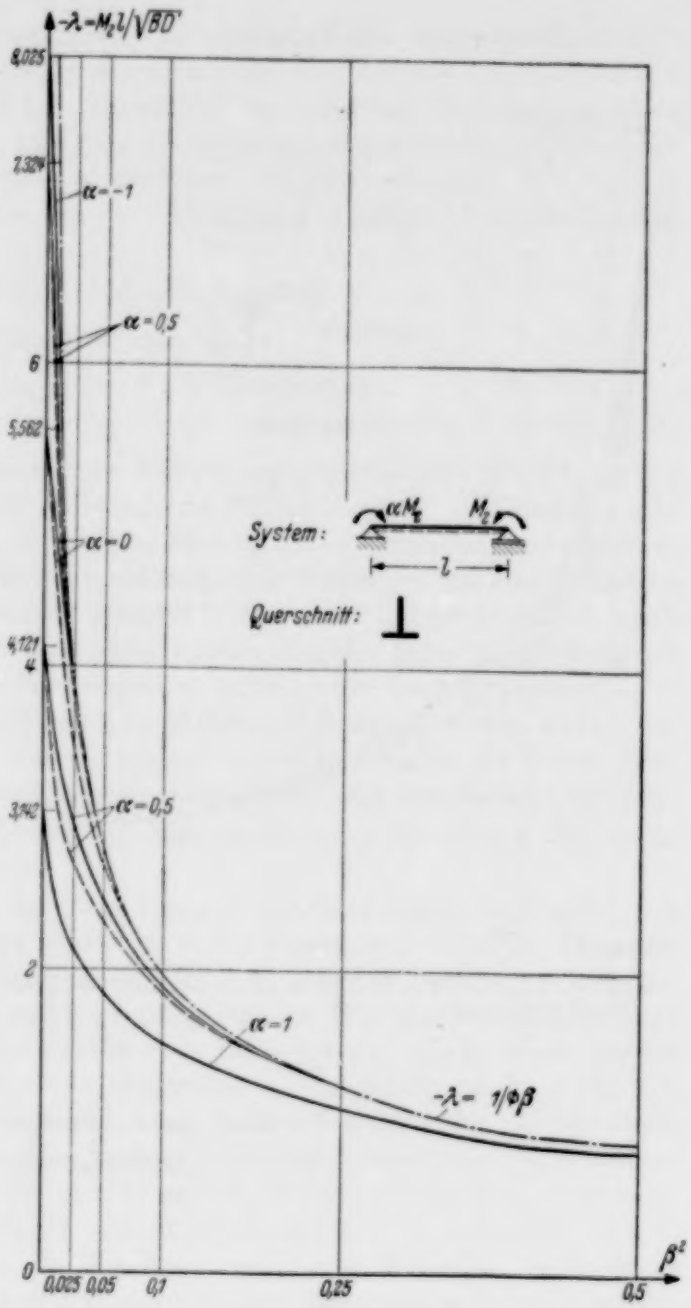
Tabelle 1b. *Zusammenstellung der in Abb. 8b aufgetragenen Kippwerte λ.*

β^2	$\varrho = 0$		$\varrho = -0{,}625$		$\varrho = -2$	
	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix
0,025	— 5,982	— 6,048	— 5,259	— 5,298	— 3,321	— 3,325
0,050	— 6,971	— 7,056	— 5,724	— 5,764	— 2,778	— 2,779
0,100	— 8,486	— 8,602	— 6,258	— 6,294	— 2,165	— 2,175
0,250	— 11,767	— 11,948	— 6,788	— 6,810	— 1,470	— 1,473
0,500	— 15,712	— 15,969	— 6,660	— 6,674	— 1,065	— 1,065

Abb. 9 a und b. Verlauf der aus (7) berechneten Kippwerte λ.
——— λ aus 8-reihiger Matrix;
- - - - - - - - - - - - λ aus 4-reihiger Matrix.



a



b

Tabelle 2a. *Zusammenstellung der in Abb. 9 a aufgetragenen Kippwerte λ.*

β^2	$a = 1$ $\lambda_{ex.} = \pi\left[(\pi\,\Phi\,\beta/2) + \sqrt{1 + (\pi\,\Phi\,\beta/2)^2}\right]$	$a = 0{,}5$ 4-reih. Matrix	$a = 0{,}5$ 8-reih. Matrix	$a = 0$ 4-reih. Matrix	$a = 0$ 8-reih. Matrix	$a = -0{,}5$ $\lambda = -1/a\,\Phi\,\beta$ 4-reih. Matrix	$a = -0{,}5$ $\lambda = -1/a\,\Phi\,\beta$ 8-reih. Matrix	$a = -1$ $\lambda = -1/a\,\Phi\,\beta$ 4- und 8-reih. Matrix
0,025	4,662	5,989	7,305	8,280	23,501	7,755	7,755	3,877
0,050	5,421	6,969	8,604	9,572	28,426	5,483	5,483	2,742
0,100	6,589	8,441	10,597	11,486	35,508	3,877	3,877	1,939
0,250	9,131	11,647	14,916	15,421	49,442	2,452	2,452	1,226
0,500	12,193	15,728	20,071	20,135	65,130	1,734	1,734	0,867

Tabelle 2b. *Zusammenstellung der in Abb. 9 b aufgetragenen Kippwerte λ.*

β^2	$a = 1$ $\lambda_{ex.} = \pi\left[(\pi\,\Phi\,\beta/2) - \sqrt{1 + (\pi\,\Phi\,\beta/2)^2}\right]$	$a = 0{,}5$ $\lambda \geqq -1/\Phi\,\beta$ 4-reih. Matrix	$a = 0{,}5$ $\lambda \geqq -1/\Phi\,\beta$ 8-reih. Matrix	$a = 0$ $\lambda \geqq -1/\Phi\,\beta$ 4-reih. Matrix	$a = 0$ $\lambda = -1/\Phi\,\beta$ 8-reih. Matrix	$a = -0{,}5$ $\lambda \geqq -1/\Phi\,\beta$ 4-reih. Matrix	$a = -0{,}5$ $\lambda = -1/\Phi\,\beta$ 8-reih. Matrix	$a = -1$ $\lambda = -1/\Phi\,\beta$ 4- und 8-reih. Matrix
0,025	— 2,117	— 2,684	— 2,949	— 3,274	— 3,877	— 3,759	— 3,877	— 3,877
0,050	— 1,821	— 2,275	— 2,440	— 2,650	— 2,742	— 2,742	— 2,742	— 2,742
0,100	— 1,498	— 1,824	— 1,880	— 1,939	— 1,939	— 1,939	— 1,939	— 1,939
0,250	— 1,081	— 1,226	— 1,226	— 1,226	— 1,226	— 1,226	— 1,226	— 1,226
0,500	— 0,809	— 0,867	— 0,867	— 0,867	— 0,867	— 0,867	— 0,867	— 0,867

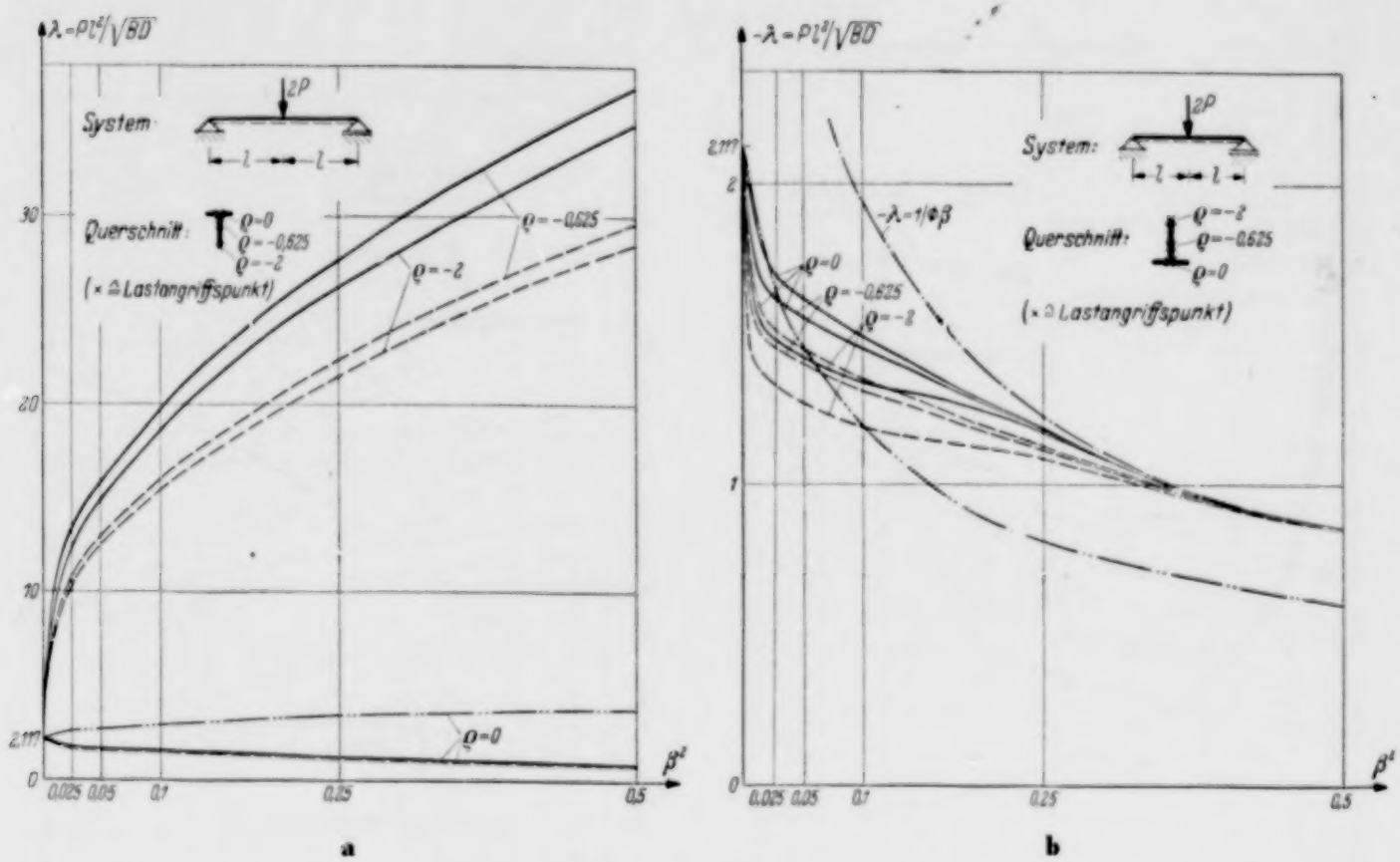


Abb. 10 a und b. Verlauf der aus (8) berechneten Kippwerte λ.

——— λ aus 8-reihiger Matrix; · · · · · · · · · · · · λ aus 4-reihiger Matrix; · · · · · · · · · · · · λ aus Abh. v. Pettersson [s. Fußnote 3 von S. 187].

Tabelle 3a. *Zusammenstellung der in Abb. 10a aufgetragenen Kippwerte λ.*

β^2	$\varrho = 0$		$\varrho = -0{,}625$		$\varrho = -2$	
	4-reih. Matrix	8-reih.-Matrix	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix
0,025	1,825	2,052	10,680	13,325	10,304	12,252
0,050	1,877	2,125	12,772	15,583	12,350	14,798
0,100	1,960	2,204	15,862	19,464	15,318	18,508
0,250	2,124	2,400	22,246	27,523	21,424	26,073
0,500	2,294	2,599	29,641	36,762	28,488	34,784

Tabelle 3b. *Zusammenstellung der in Abb. 10b aufgetragenen Kippwerte λ.*

β^2	$\varrho = 0$		$\varrho = -0{,}625$		$\varrho = -2$	
	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix
0,025	— 1,519	— 1,691	— 1,464	— 1,630	— 1,337	— 1,485
0,050	— 1,450	— 1,611	— 1,396	— 1,557	— 1,267	— 1,419
0,100	— 1,349	— 1,488	— 1,307	— 1,450	— 1,195	— 1,339
0,250	— 1,126	— 1,184	— 1,115	— 1,180	— 1,082	— 1,172
0,500	— 0,862	— 0,867	— 0,862	— 0,867	— 0,861	— 0,867

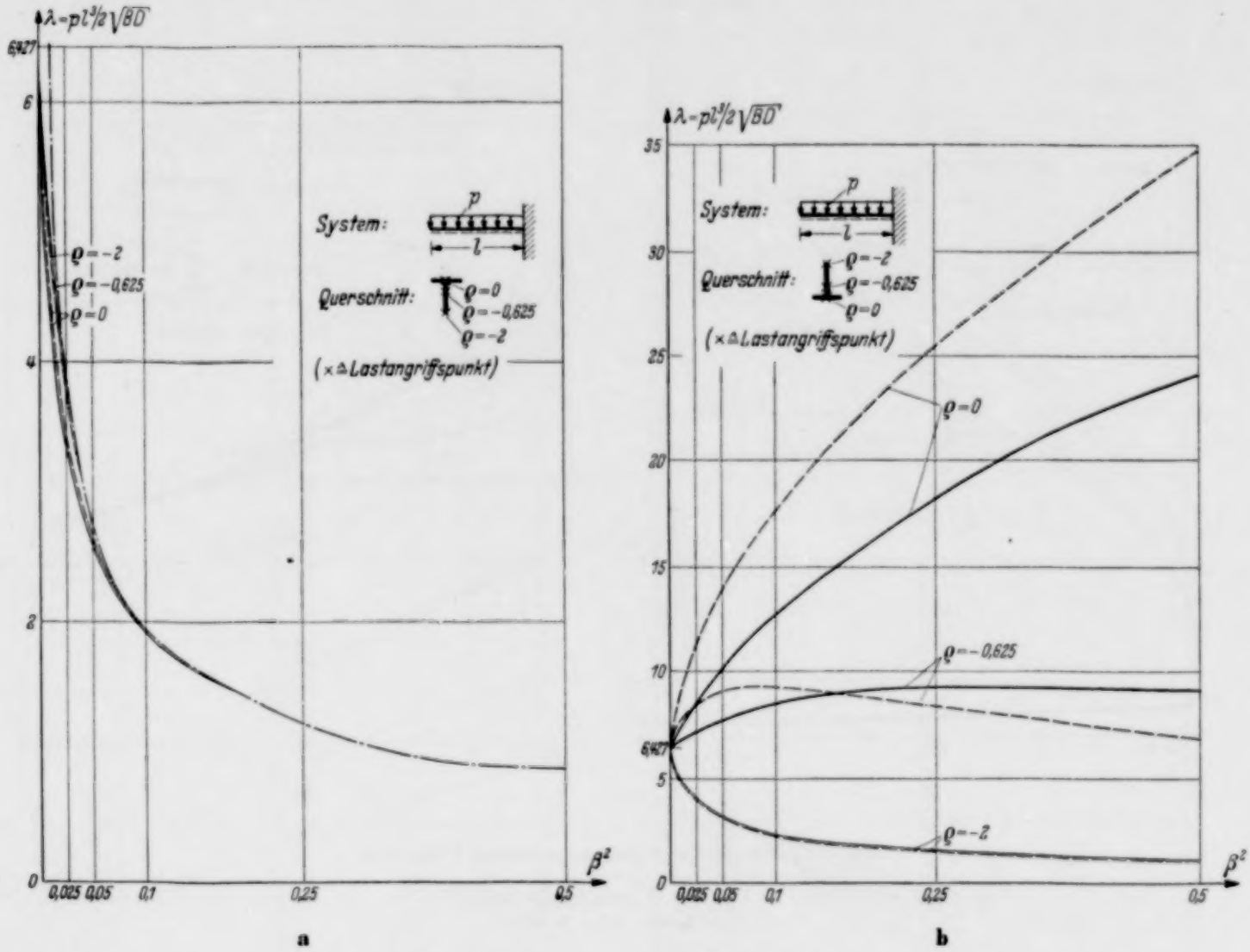


Abb. 11 a und b. Verlauf der aus (9) und (10) berechneten Kippwerte λ.

——— λ aus 8-reihiger Matrix; - - - - - - - - - - - - λ aus 4-reihiger Matrix.

Tabelle 4a. *Zusammenstellung der in Abb. 11a aufgetragenen Kippwerte λ.*

β^2	$\varrho = 0$		$\varrho = -0{,}625$		$\varrho = -2$	
	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix
0,025	3,399	3 324	3,752	—	3,877	3,877
0,050	2,646	2,603	2,742	—	2,742	2,742
0,100	1,934	1,924	1,939	—	1,939	1,939
0,250	1,226	1,226	1,226	—	1,226	1,226
0,500	0,867	0,867	0,867	—	0,867	0,867

Tabelle 4b. *Zusammenstellung der in Abb. 11b aufgetragenen Kippwerte λ.*

β^2	$\varrho = 0$		$\varrho = -0{,}625$		$\varrho = -2$	
	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix
0,025	11,231	8,464	8,616	7,042	3,809	3,814
0,050	13,682	10,072	9,137	7,706	2,934	2,935
0,100	17,411	12,567	9,329	8,471	2,179	2,212
0,250	25,328	17,930	8,390	9,236	1,416	1,421
0,500	34,649	23,977	6,870	9,025	1,012	1,013

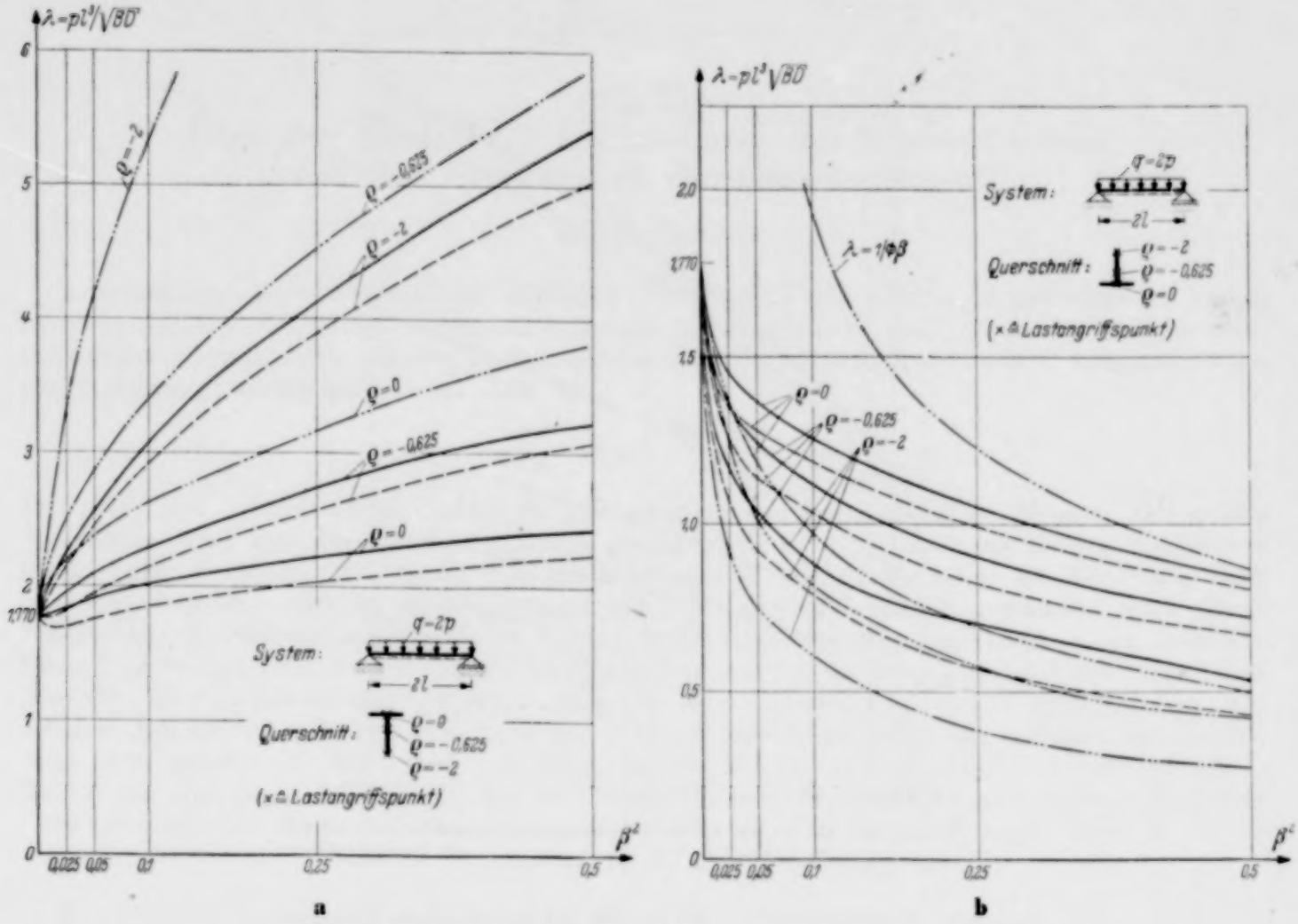


Abb. 12a und b. Verlauf der aus (11) und (12) berechneten Kippwerte λ.

———— λ aus 8-reihiger Matrix; - - - - - - - - - - - - λ aus 4-reihiger Matrix; - - - - - - - - - - - - - - λ aus Diss. Meissner [s. Fußnote 2 von S. 187].

Tabelle 5a. *Zusammenstellung der in Abb. 12a aufgetragenen Kippwerte λ.*

β^2	$\varrho = 0$		$\varrho = -0{,}625$		$\varrho = -2$	
	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix
0,025	1,675	1,819	1,808	1,941	2,134	2,245
0,050	1,742	1,902	1,942	2,081	2,435	2,538
0,100	1,836	2,010	2,135	2,284	2,897	3,074
0,250	2,019	2,205	2,564	2,717	3,881	4,105
0,500	2,230	2,419	3,055	3,211	5,026	5,416

Tabelle 5b. *Zusammenstellung der in Abb. 12b aufgetragenen Kippwerte λ.*

β^2	$\varrho = 0$		$\varrho = -0{,}625$		$\varrho = -2$	
	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix
0,025	1,346	1,443	1,251	1,345	1,065	1,158
0,050	1,278	1,366	1,162	1,244	0,929	1,032
0,100	1,181	1,255	1,032	1,108	0,776	0,880
0,250	0,994	1,050	0,831	0,903	0,571	0,706
0,500	0,804	0,833	0,668	0,720	0,432	0,531

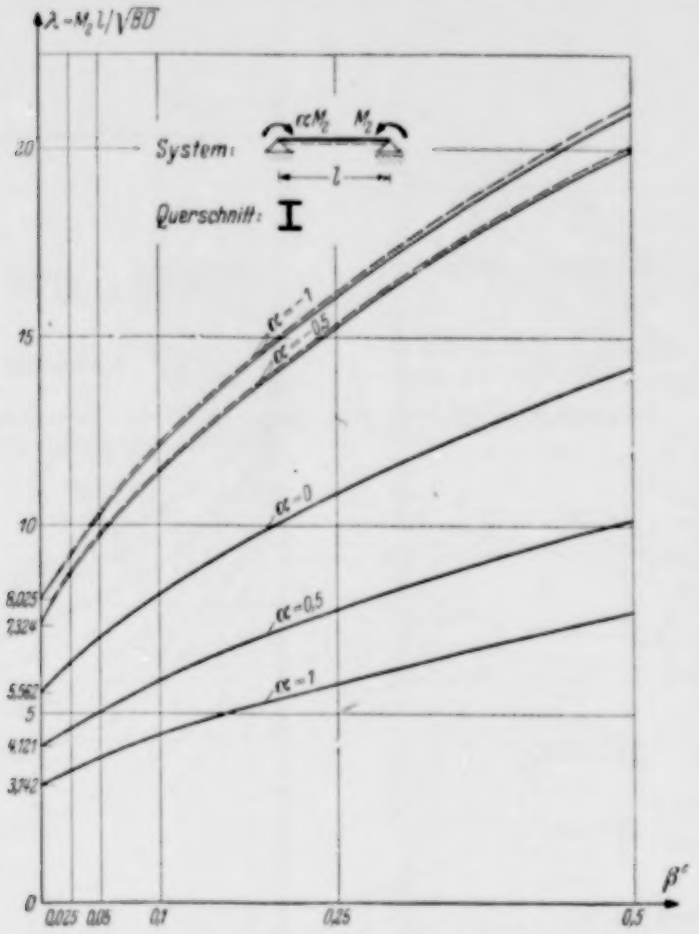


Abb. 13. Verlauf der aus (13) berechneten Kippwerte λ.
——— λ aus 8-reihiger Matrix; - - - - - - - - - - - - λ aus 4-reihiger Matrix.

Tabelle 6. *Zusammenstellung der in Abb. 13 aufgetragenen Kippwerte λ.*

β^2	$\alpha = 1$		$\alpha = 0{,}5$		$\alpha = 0$		$\alpha = -0{,}5$		$\alpha = -1$	
	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix	4-reih. Matrix	8-reih. Matrix
0,025	3,506	3,508	4,618	4,619	6,372	6,369	8,748	8,716	9,509	9,427
0,050	3,838	3,839	5,061	5,062	7,029	7,025	9,756	9,718	10,498	10,408
0,100	4,427	4,428	5,843	5,844	8,157	8,150	11,418	11,372	12,175	12,073
0,250	5,849	5,850	7,725	7,725	10,826	10,817	15,260	15,198	16,146	16,012
0,500	7,652	7,653	10,110	10,110	14,190	14,178	20,056	19,974	21,152	20,979

7. Zusammenfassung. Für den geraden Träger mit einfach-symmetrischem, offenem und quasiwölbfreiem Profil (der Wölbwiderstand ist Null) unter der Wirkung von linear und quadratisch verlaufendem Biegemoment werden die Kipp-Integralgleichungen für verschiedene Randbedingungen mitgeteilt. Für diese Integralgleichungen bestehen Programme, mit denen Kippwerte für bestimmte Parameter (Festwerte des Querschnittes und des Lastangriffes) mit Hilfe des elektronischen Rechenautomaten IBM 650 berechnet werden. Die numerischen Ergebnisse sind in Form von Kurven und Tabellen zusammengestellt. Es gelingt nicht, die Integralgleichungen des einfach-symmetrischen I-Profiles mit bekannten Funktionen darzustellen. Für solche Profile wird ein zeichnerisches Näherungsverfahren vorgeschlagen. Dessen Genauigkeit hängt von den näherungsweise numerisch ermittelten drei Stützwerten und von der individuellen Annahme des mutmaßlichen Kippwertverlaufes dazwischen ab.

Mein Dank gilt den Herren Professoren Dr.-Ing. *K. Marguerre* und Dr. *A. Walther* für die freundliche Förderung und der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung dieser Arbeit.

Aus dem Institut für Praktische Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt (Prof. Dr. *A. Walther*)

(Eingegangen am 25. Juli 1959)

Anschrift des Verfassers: *L. Kraus*, Wiesbaden, Idsteinerstraße 11.

Über den Einfluß der Unterteilung von Schmierflächen auf die Tragfähigkeit von Schmierfilmen*

Von **H. Peeken**

1. Einleitung. Durch viele Untersuchungen theoretischer und auch experimenteller Art ist das hydrodynamische Verhalten des ebenen Schmierkeiles hinreichend geklärt. Im Falle des unendlich breiten ebenen Schmierkeiles genügt der im Schmierfilm erzeugte Druck P bekannterweise der Beziehung von *Reynolds* (vergl. Abb. 1)

$$\frac{dP}{dX} = 6\,\eta\,U\,\frac{H - H^*}{H^3}\,.$$

Das heißt, der Druckgradient enthält die dritte Potenz der Spalthöhe H im Nenner. Bei großen Spalthöhen wird also der spezifische Druck gering bleiben, während er bei kleinen Spalthöhen große Werte annimmt. Aus dieser Aussage leitet sich für die Praxis sofort die Forderung nach engen Spalten ab, wenn die Erzielung einer möglichst großen Tragkraft gewünscht wird. Diese Forderung, die Schmierspalte klein zu halten, stößt dann auf Schwierigkeiten, wenn man sehr lange Lagerungen, wie sie z. B. in Werkzeugmaschinen auftreten, aus einem einzigen Schmierkeil herstellt. Der Grund für das Auftreten großer Spalte bei großen Lagerlängen muß darin gesucht werden, daß der herstellbaren Schmierkeilneigung aus fertigungstechnischen Gründen eine Grenze nach unten gesetzt ist. Abb. 1 zeigt deutlich, daß der Druck am Keileinlauf zunächst sehr gering bleibt, um erst gegen Ende des Keiles zu technisch brauchbaren Höhen anzusteigen. Praktisch wird also bei einer Lagerausführung nach Abb. 1 die gesamte Tragkraft gegen Ende des Keiles erzeugt, während die Fläche am Keileinlauf für die Druckerzeugung ausfällt.

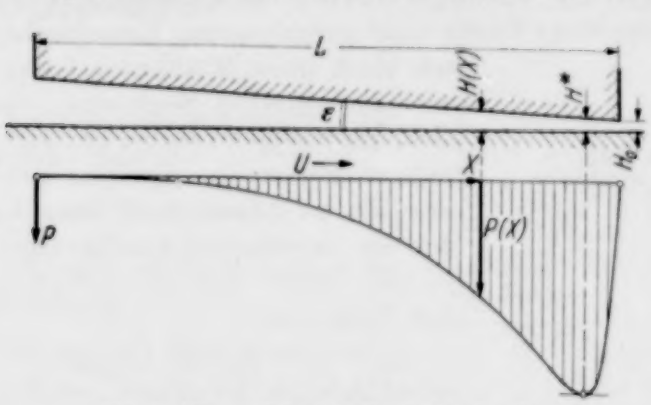


Abb. 1. Ebener Schmierkeil mit Druckverlauf (schematisch).

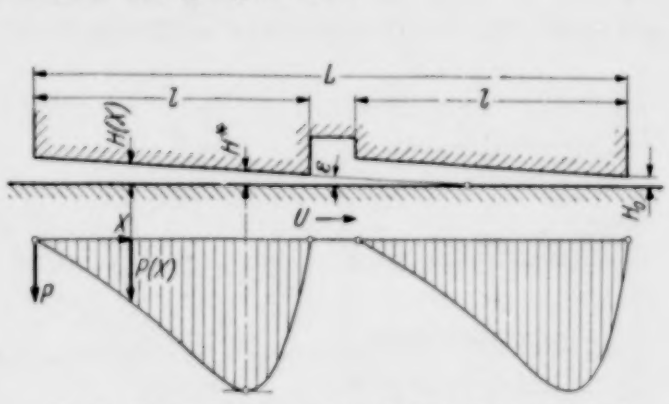


Abb. 2. Unterteilter ebener Schmierkeil mit Druckverlauf (schematisch).

Um hier Abhilfe zu schaffen, werden Lagerungen und Führungen von größerer Länge aus mehreren „Teilkeilen" aufgebaut. Die Anordnung einer „mehrflächigen" Lagerung dieser Art ist gleichzeitig mit dem dazugehörigen Druckverlauf in Abb. 2 dargestellt. Schon seit langem wird in der Praxis das Prinzip der Mehrflächigkeit angewandt. Jedoch wird die Aufteilung der zur Verfügung stehenden Gleitflächen meist vom Konstrukteur nach rein konstruktiven oder gefühlsmäßigen Gesichtspunkten vorgenommen ohne Kenntnis, wie sich im einzelnen Fall die Unterteilung auf die Tragfähigkeit auswirkt. Für die Praxis ist demnach die Frage von Bedeutung, wie ein ebener Schmierkeil von vorgegebener Länge und Breite zu unterteilen ist, um ein Optimum an Tragkraft zu erreichen.

Dabei soll erwähnt werden, daß oftmals eine Unterteilung der Lagerfläche nicht zur Erhöhung der Tragkraft, sondern zur besseren Ölversorgung vorgenommen werden muß. Dieser Fall tritt bei sehr kurzhubigen Gleitschuhen auf. Die Länge des Hubes ist bei Gleitschuhen ein Maß für die Teilflächenlänge. Wird die so bestimmte Teilflächenlänge überschritten, so kann der Fall eintreten, daß Teile der Lagerfläche nicht vom Schmiermittel benetzt werden. Dieser Gesichtspunkt soll je-

* Auszug aus der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Braunschweig 1959 genehmigten Dissertation. 1. Berichter: Professor Dr. *H. Schlichting*, 2. Berichter: Professor Dr. *G. Vogelpohl*.

doch hier unberücksichtigt bleiben. Den Untersuchungen liegt die Annahme zu Grunde, daß die Schmierspalte zu jeder Zeit mit Schmiermittel angefüllt sind.

Das Schrifttum liefert zur Frage des Einflusses der Teilflächenzahl n auf die Tragfähigkeit nur sehr spärliche und sich zum Teil widersprechende Angaben. Während von *Gümbel*[1] die Ansicht vertreten wird, daß in bestimmten Fällen eine Unterteilung des Schmierkeiles unendlicher Breite durchaus sinnvoll sein kann, hält *Duffing*[2] in jedem Falle die Unterteilung als Mittel zur Tragfähigkeitserhöhung für nicht geeignet. Bei *Shaw* und *Macks*[3] findet man die Aussage, daß eine Unterteilung der Lauffläche immer zu einer Abnahme der Tragfähigkeit führt. Für den Fall des endlich breiten Schmierkeiles besteht unter den Autoren *Talke*[4], *Schiebel*[5], *Drescher*[6], *Frössel*[7] und *Niemann*[8] darin Übereinstimmung, daß der maximale Flächendruck dann erreicht wird, wenn Länge und Breite des Schmierkeiles etwa gleich groß sind.

Die Entwicklung der mehrflächigen Lagerung in der Praxis zeigt zwei Bauformen. Bei der weitverbreiteten „starren Bauform" sind die einzelnen Keile durch eine spanabhebende Bearbeitung der starren Lagerfläche hergestellt. Die zweite Bauform ist nach Art des *Michell*-Lagers aus einzelnen Gleitsteinen aufgebaut, die auf einer balligen Fläche gelagert, sich der Belastung entsprechend einstellen können. Die vorliegende Untersuchung beschränkt sich auf die starre Lagerform.

Nicht nur im Falle des ebenen Schmierkeiles, sondern auch beim Gleitlager findet man Bauformen, die eine Vielflächigkeit aufweisen. Durch die Forderung des Werkzeugmaschinenbaues nach möglichst genauer Zentrierung der Wellen wurde besonders in neuerer Zeit die Entwicklung dieser Lager vorangetrieben. Daher sind gerade auf diesem Sektor des Maschinenbaues die verschiedensten Bauformen mehrflächiger Gleitlager anzutreffen. Der Gesichtspunkt, wie im einzelnen Fall die Ausbildung der am Umfang gleichmäßig verteilten Schmierkeile erreicht wird, führt zu einer Einteilung der mehrflächigen Gleitlager in drei Gruppen:

1. Die Schmierkeile werden durch elastische Verformung einer entsprechend gestalteten dünnwandigen Lagerbuchse gebildet. Der typische Vertreter dieser Lagerbauart ist das Mackensen-Lager.

2. Die einzelnen Schmierkeile werden durch eine entsprechende Verlagerung von Gleitsteinen erzeugt. Man hat hier das Prinzip des *Michell*-Lagers als Axiallager auf das radiale Gleitlager angewandt. Die Gleitflächen sind in diesem Falle nicht mehr Zonen einer geschlossenen Lagerbuchse wie noch beim Mackensen-Lager, sondern einzelne Segmente, die sich, auf balligen Leisten gelagert, je nach Belastung einstellen können. Diese Bauart trifft man in den verschiedensten Ausführungsformen meist im ausländischen Schrifttum an[9].

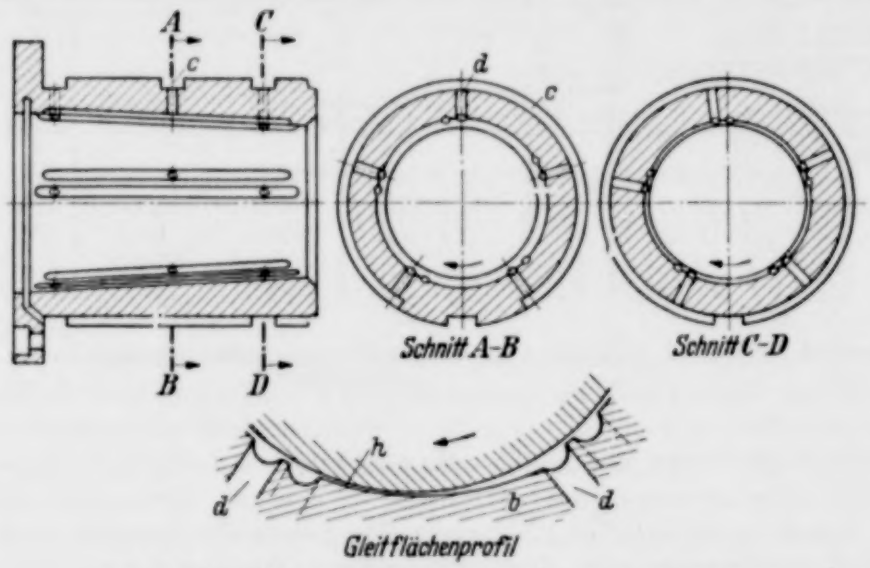


Abb. 3. Fünfflächiges konisches Gleitlager mit starrer Lagerbuchse (Fritz Studer A. G., Bern).

3. Bei der letzten Gruppe der mehrflächigen Gleitlager werden die einzelnen Gleitflächen durch entsprechende Formgebung einer starren Lagerbuchse hergestellt. In Abb. 3 ist ein Beispiel dieser Lagerbauart gezeigt. Es handelt sich dabei um ein fünfflächiges konisches Gleitlager, das als Spindellager einer Werkzeugmaschine Verwendung findet.

---

[1] *L. Gümbel* u. *E. Everling*, Reibung und Schmierung im Maschinenbau, Berlin 1925.

[2] *G. Duffing*, Schmiermittelreibung bei Gleitflächen von endlicher Breite, in: *Auerbach-Hort* „Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik" Bd. 5, S. 839, Leipzig 1929/30.

[3] *M. G. Shaw* u. *E. F. Macks*, Analysis and Lubrication of Bearings, New York 1949.

[4] *K. Talke*, Beiträge zur hydrodynamischen Schmiertheorie des ebenen Gleitschuhes auf ebener Gleitbahn. Diss. Braunschweig 1948.

[5] *A. Schiebel*, Die Gleitlager, Berlin 1933.

[6] *H. Drescher*, Konstruktion 8 (1956), S. 94.

[7] *W. Frössel*, Z. angew. Math. Mech. 21 (1941) S. 321.

[8] *G. Niemann*, Maschinenelemente 1. Bd., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950.

[9] *A. G. M. Michell*, Lubrication, Principles and Practice, London 1951. — *M. C. Shaw* u. *E. F. Macks*, Analysis and Lubrication of Bearings, New York 1949.

Wie im Falle des ebenen Gleitschuhes erhebt sich auch hier die Frage nach dem Einfluß der Unterteilung auf die Tragfähigkeit der mehrflächigen Gleitlager. Einige Hinweise, die diese Frage betreffen, finden sich im neueren ausländischen Schrifttum. So wird von *Shqw* und *Macks* besonders bei Lagern geringer Breite eine Aufteilung der Lagerfläche in quadratische Teilflächen befürwortet, um, wie die Verfasser angeben, auf diese Weise durch Herabsetzung des Seitenflusses eine Erhöhung der Tragfähigkeit zu erzielen. Eine weitere Untersuchung dieser Art wurde von *Boyd* und *Raimondi*[1] allerdings mit Lagern der Bauart 2 vorgenommen. Die Autoren kommen nach Diskussion der Zusammenhänge zu dem Schluß, daß die Anwendung der untersuchten Segmentlager in gewissen Fällen vorteilhaft sein kann, daß aber eine bedeutende Überlegenheit gegenüber dem normalen Gleitlager, wie sie manchmal propagiert wird, keinesfalls besteht.

Bei den mehrflächigen Gleitlagern ist demnach in erster Linie die Frage von Interesse, ob und in welchem Maße bei Gleitlagern geringer Breite durch die Maßnahme der Unterteilung eine Tragkraftssteigerung zu erzielen ist.

2. Der unterteilte unendlich breite ebene Schmierkeil. Abb. 4 zeigt einen unterteilten ebenen Schmierkeil für $n = 4$ Teilflächen und für eine Bewegungsrichtung. Es genügt bei dieser Untersuchung vollkommen, Schmierkeile mit nur einer Bewegungsrichtung zu behandeln, da sich Lagerungen für hin- und hergehende Bewegung sofort auf den dargestellten Fall zurückführen lassen. Für die Behandlung des Problems müssen noch folgende Voraussetzungen gemacht werden: Die Schmiernuten stehen fortwährend mit dem Schmiermittelzulauf in Verbindung, so daß jede Teilfläche genügend mit Schmierstoff versorgt wird und der Druck P im Öl mit Sicherheit an den Kanten der Schmiernuten auf den Außendruck abfällt. Unterdrücke können in der Schmiernut nicht auftreten.

Läßt man die Schmiernuten zwischen den einzelnen Teilflächen unberücksichtigt, so ergibt sich für die Gesamtlänge des Schmierkeiles

$$L = n \cdot l \,. \qquad (1)$$

Der Schmierspaltverlauf berechnet sich aus

$$H(X) = \varepsilon (E - X) \,. \qquad (2)$$

Außerdem gilt nach Abb. 4 die Beziehung

$$E = \frac{H_0}{\varepsilon} + l \,. \qquad (3)$$

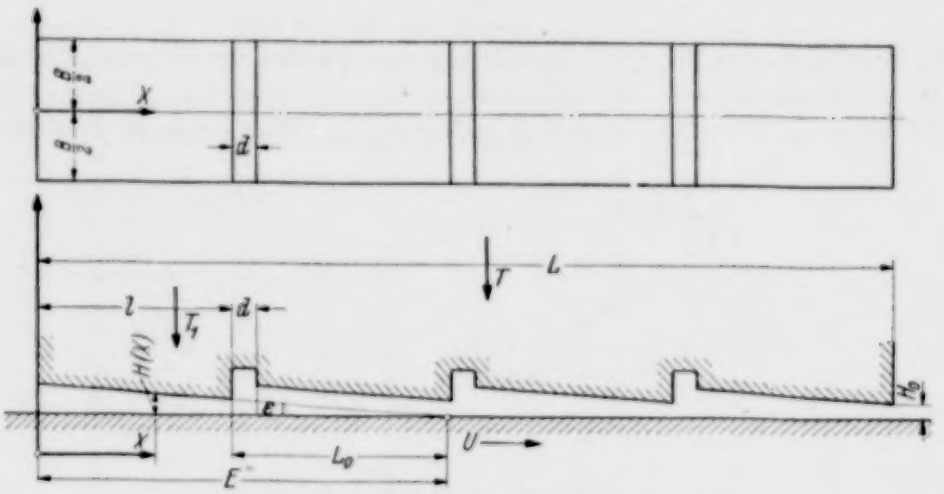


Abb. 4. Unterteilter ebener Schmierkeil für $n = 4$.

Der Druck im Schmiermittel des unendlich breiten Schmierkeiles läßt sich mit Hilfe der bekannten Gleichung von *Reynolds*

$$\frac{dP}{dX} = 6\,\eta\,U\,\frac{H - H^*}{H^3} \qquad (4)$$

berechnen. Darin bedeutet η die Viskosität des Schmiermittels, U die Gleitgeschwindigkeit und H^* eine Konstante, die die Spalthöhe an der Stelle darstellt, für die $dP/dX = 0$ wird (vergl. Abb. 1). Durch Einführung des Spaltverlaufes nach (2) und durch Integration ergibt sich bei Berücksichtigung der Randbedingungen $P = P_0 = 0$ für $X = 0$ und $X = l$ aus (4) die Beziehung für den Druck $P(X)$

$$P(X) = \frac{6\,\eta\,U}{H^2}\,\frac{X(l - X)}{(2\,E - l)} \,. \qquad (5)$$

Eine nochmalige Integration zwischen den Grenzen 0 und l liefert den Ausdruck für die Tragfähigkeit T_1 einer Teilfläche der Länge l

$$\frac{T_1}{6\,\eta\,U} = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\ln\frac{E}{E - l} - \frac{2\,l}{2\,E - l}\right). \qquad (6)$$

[1] *J. Boyd* u. *A. A. Raimondi*, Mechanical Engineering 75 (1953) S. 380.

Führt man in (6) die geringste Schmierschichtstärke H_0, die bei völliger Reinheit des Schmiermittels nur durch die Höhe der Rauhigkeiten gegeben ist, als konstant nach (3) ein, so ergibt sich mit $l = L/n$ die gesamte Tragkraft T des Schmierkeiles zu

$$\frac{T}{\eta U} = \frac{6n}{\varepsilon^2}\left[\ln\left(1+\frac{L\varepsilon}{n H_0}\right) - 2\,\frac{\frac{L\varepsilon}{n H_0}}{2+\frac{L\varepsilon}{n H_0}}\right]. \tag{7}$$

Es ist zweckmäßig, statt der Tragkraft T die Druckkennzahl $\left[\frac{\bar{p} H_0^2}{\eta U L}\right]$ einzuführen. Sie ergibt sich mit dem Flächendruck $\bar{p} = T/L$ aus (7) zu

$$\left[\frac{\bar{p} H_0^2}{\eta U L}\right] = \frac{6n}{\frac{\varepsilon^2 L^2}{H_0^2}}\left[\ln\left(1+\frac{L\varepsilon}{n H_0}\right) - 2\,\frac{\frac{L\varepsilon}{n H_0}}{2+\frac{L\varepsilon}{n H_0}}\right]. \tag{8}$$

Wie (8) zeigt, ist die Druckkennzahl als Maß für den mittleren Flächendruck $\bar{p}$ von der Teilflächenzahl n und von der geometrischen Größe $\lambda = L\varepsilon/H_0$ abhängig:

$$\left[\frac{\bar{p} H_0^2}{\eta U L}\right] = \frac{6n}{\lambda^2}\left[\ln\left(1+\frac{\lambda}{n}\right) - 2\,\frac{\frac{\lambda}{n}}{2+\frac{\lambda}{n}}\right]. \tag{9}$$

Es liegt daher nahe, die Auswertung von (9) für verschiedene Teilflächenzahlen n in Abhängigkeit von λ vorzunehmen. Die Ergebnisse dieser Auswertung für $n = 1; 2; 3; 4; 5$ und 6 und $\lambda = 1$ bis 100 sind in den Abb. 5 und 6 aufgetragen. Man erkennt aus dieser Auftragung, daß im Bereich

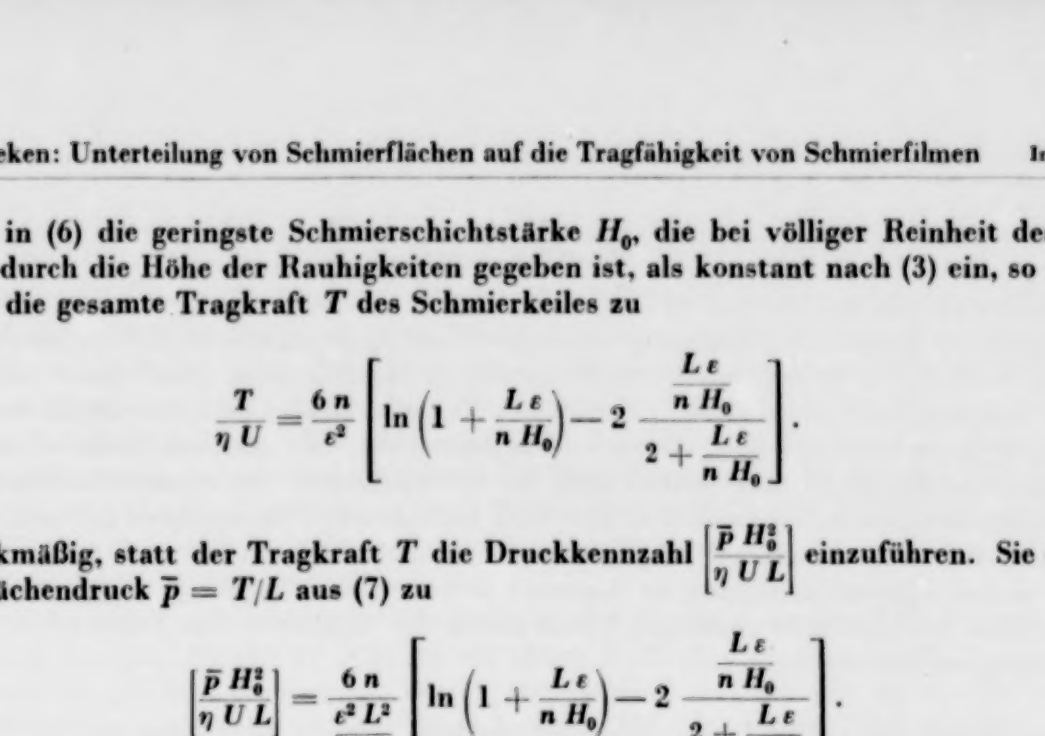


Abb. 5. Druckkennzahl $\left[\frac{\bar{p} H_0^2}{\eta U L}\right]$ in Abhängigkeit von $\lambda = \frac{L\varepsilon}{H_0}$ mit n als Parameter.

$\lambda = 1$ bis $\lambda = 10{,}4$ eine Unterteilung zu einer geringeren Druckkennzahl $\left[\frac{\bar{p} H_0^2}{\eta U L}\right]$ für die unendliche Breite führt. Erst für Werte von λ, die größer sind als 10,4, bietet eine Unterteilung hinsichtlich der Tragkraft Vorteile. Um zu erkennen, welche Tragkraftsteigerungen im Bereich $\lambda > 10{,}4$ durch Flächenunterteilungen möglich sind, sind in Abb. 6 noch einmal der Verlauf der Druck-

kennzahl für $n = 1$ sowie diejenigen Druckkennzahlen für $n = 2; 3; 4; 5$ und 6, die die jeweils höchste Tragkraft liefern, aufgetragen. Aus dieser Darstellung ist zu ersehen, daß in den Bereichen

$$10{,}4 \leqq \lambda \leqq 17{,}3 \text{ die Teilflächenzahl } n = 2\,,$$
$$17{,}3 \leqq \lambda \leqq 27{,}2 \text{ die Teilflächenzahl } n = 3\,,$$
$$27{,}2 \leqq \lambda \leqq 35{,}0 \text{ die Teilflächenzahl } n = 4\,,$$
$$35{,}0 \leqq \lambda \leqq 38{,}3 \text{ die Teilflächenzahl } n = 5$$

die größte Druckkennzahl und damit die größte Tragkraft liefert. In Abb. 6 sind außerdem die bei Wahl der optimalen Teilflächenzahl möglichen Tragkraftsteigerungen in % bezogen auf die Tragkraft für $n = 1$ in Abhängigkeit von $\lambda = L\,\varepsilon/H_0$ aufgetragen. Die Steigerungen betragen im Bereich

$$n = 2 \text{ bis zu } 15\%\,,$$
$$n = 3 \text{ bis zu } 37\%\,,$$
$$n = 4 \text{ bis zu } 53\%\,,$$
$$n = 5 \text{ bis zu } 60\%\,.$$

Bei noch höheren Teilflächenzahlen nimmt die Tragkraftsteigerung weiterhin stetig zu, bis sie bei ganz großen Teilflächenzahlen wieder abnimmt.

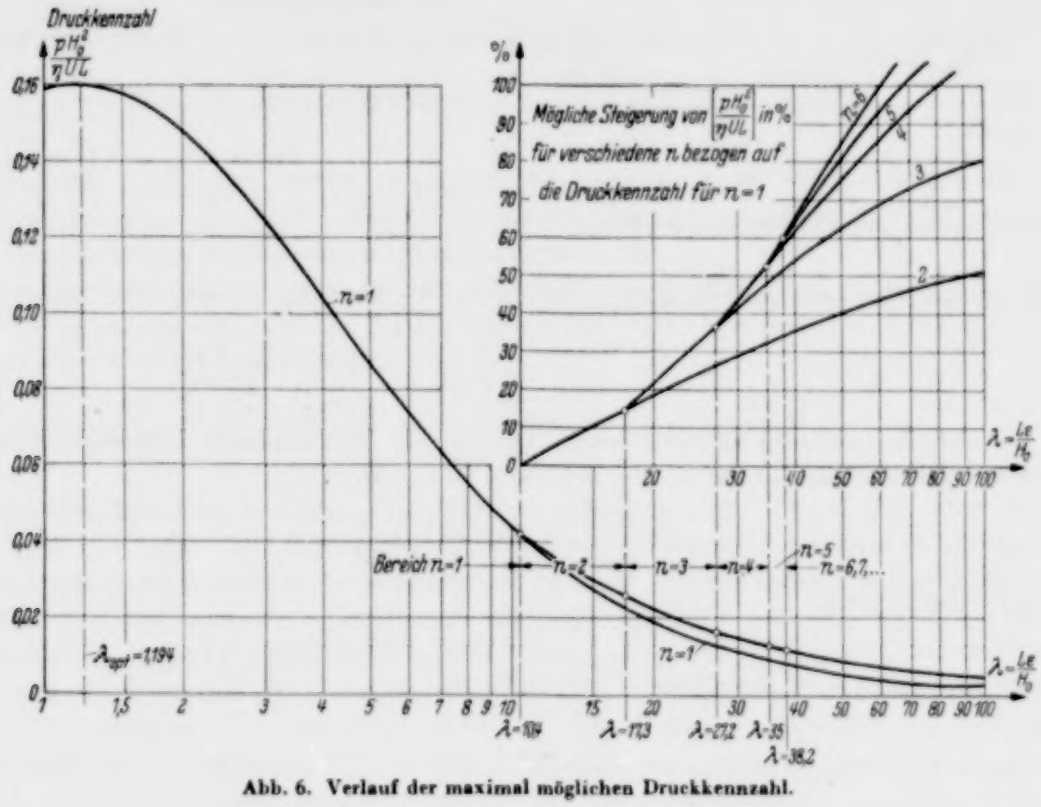


Abb. 6. Verlauf der maximal möglichen Druckkennzahl.

Die hier gefundenen hohen Prozentzahlen für die durch Flächenunterteilung mögliche Steigerung der Tragkräfte dürfen jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, daß es sich absolut gesehen in diesem Bereich um sehr kleine Tragkräfte handelt. Die bei weitem höchsten Tragkräfte ergeben sich ohne Unterteilung im Bereich $\lambda = 1$ bis $\lambda = 10{,}4$, wobei das Maximum bei $\lambda = 1{,}194$ zu

$$\left[\frac{\bar{p}\,H_0^2}{\eta\,U\,L}\right] = 0{,}16$$

gefunden wurde. Die dabei einzuhaltene optimale Schmierkeilneigung ergibt sich aus $\lambda = 1{,}194$ zu

$$\varepsilon_{opt} = 1{,}194\,\frac{H_0}{L}\,.$$

Da der Bereich von λ, in dem $n = 1$ die höchste Tragkraft liefert, eine Zehnerpotenz umfaßt, wird es sicherlich mit Hilfe der modernen Bearbeitungsverfahren immer möglich sein, eine Keilsteigung herzustellen, die die Bedingung $\varepsilon = (1 \div 10)\,H_0/L$ erfüllt. Unter dieser Voraussetzung kann festgestellt werden, daß eine Unterteilung einer unendlich breiten Gleitfläche keine Vorteile bringt,

sondern nur zu einer Verminderung der Tragfähigkeit führt. Die eingehende Darlegung der Vorgänge macht es jedoch möglich, auch die Grenzen anzugeben, in denen in bestimmten Fällen eine Unterteilung des Schmierkeiles zu einer Tragkraftsteigerung führen kann.

3. Der endlich breite ebene Schmierkeil. Der Druck P im Schmiermittel eines endlich breiten ebenen Schmierkeiles genügt der bekannten Differentialgleichung von *Reynolds*

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{H^3}{\eta}\frac{\partial P}{\partial X}\right)+\frac{\partial}{\partial \mathfrak{z}}\left(\frac{H^3}{\eta}\frac{\partial P}{\partial \mathfrak{z}}\right)-6\,U\frac{\partial H}{\partial X}=0\,. \tag{10}$$

Die Übereinstimmung dieser Grundgleichung der hydrodynamischen Schmiertheorie mit der Praxis ist durch zahlreiche Versuche bestätigt worden[1], so daß gleichfalls eine Übereinstimmung der Ergebnisse dieser Untersuchung mit der Praxis erwartet werden darf. Für die nachfolgenden Ableitungen erweist es sich als zweckmäßig, folgende dimensionslose Größen einzuführen:

$$\frac{X}{L}=x\,,\quad \frac{E}{L}=e\,,\quad \frac{\mathfrak{z}}{L}=\zeta\,,\quad \frac{H}{L}=h\,,\quad \frac{H_0}{L}=h_0\,,\quad p=P\frac{L}{6\,\eta\,U}\,,\quad \frac{L_0}{L}=\varphi\,. \tag{11}$$

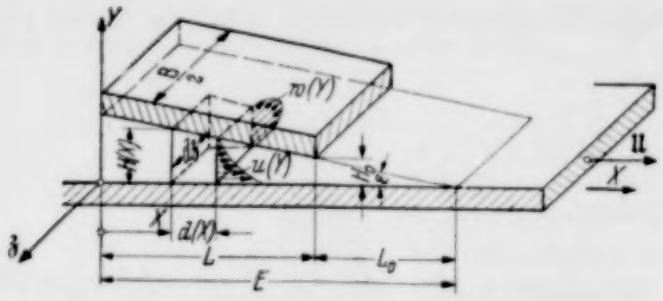


Abb. 7. Bezeichnungen am Schmierkeil endlicher Breite.

Der Schmierspaltverlauf ergibt sich zu

$$\left.\begin{aligned} H&=\varepsilon\,(E-X)\\ \text{oder dimensionslos}\qquad h&=\varepsilon\,(e-x)\,. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Außerdem folgt aus Abb. 7

$$\left.\begin{aligned} H_0&=\varepsilon\,L_0=\varepsilon\,(E-L)\\ \text{oder}\qquad h_0&=\varepsilon\,\varphi=\varepsilon\,(e-1)\,. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Das halbe Breitenverhältnis eines Schmierkeiles von endlicher Breite ergibt sich zu

$$\beta=\frac{B}{2\,L}\,. \tag{14}$$

Führt man die dimensionslosen Größen nach (11) in die *Reynolds*sche Differentialgleichung (10) ein, so erhält man eine dimensionslose Form dieser Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial \zeta}\right)-\frac{\partial h}{\partial x}=0 \tag{15}$$

mit den Randbedingungen:

$$p=p_0=0\begin{cases}\zeta=\pm\beta & \text{und alle } x\\ \left.\begin{aligned}x&=0\\ x&=1\end{aligned}\right\} & \text{und alle } \zeta\,.\end{cases}$$

Zur Lösung dieser Gleichung soll hier ein Verfahren angewandt werden, das von *Weber*[2] für die Berechnung von Gleitlagern angegeben wurde. Es stellt ein Näherungsverfahren dar, hat aber hier den Vorteil, daß sich die Lösungen geschlossen ausdrücken lassen. Wird die *Reynolds*sche Differentialgleichung (15) als Eulergleichung eines Variationsproblems aufgefaßt, so lautet das zugehörige Variationsproblem

$$\int_{-\beta}^{+\beta}\int_{0}^{1}\left[h^3\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+h^3\left(\frac{\partial p}{\partial \zeta}\right)^2-2\,h\,\frac{\partial p}{\partial x}\right]dx\,d\zeta=\text{Min}\,. \tag{16}$$

Die Lösung des Variationsproblems gelingt mit dem Näherungsansatz

$$p=f(x)\,g(\zeta) \tag{17}$$

samt den Randbedingungen

$$\begin{aligned} g(\pm\beta)&=0\,,\\ f(0)\quad&=0\,,\\ f(1)\quad&=0\,. \end{aligned}$$

[1] Z. B. *W. Nücker*, VDI-Forschungsheft 352, Berlin 1932. — *H. Drescher*, Konstruktion 8 (1956), S. 94.
[2] *C. Weber*, Z. angew. Math. Mech. 30 (1950), S. 112.

Schreibt man zur Abkürzung $df(x)/dx = f'$ und $dg(\zeta)/d\zeta = g'$, so folgt aus (16) bei Einführung des Näherungsansatzes (17):

$$\int_{-\beta}^{+\beta} \int_{0}^{1} (h^3 g^2 f'^2 + h^3 f^2 g'^2 - 2\, h\, g\, f')\, dx\, d\zeta = \text{Min} . \tag{18}$$

Setzt man eine beliebige Funktion $f(x)$, die die Randbedingungen $f\binom{0}{1} = 0$ erfüllt, in das Variationsproblem ein, so kann man nach x integrieren und erfährt, welche Bedingungen die Funktion $g(\zeta)$ erfüllen muß, damit das Integral zu einem Minimum wird. Die bei dieser Operation auftretenden bestimmten Integrale werden wie folgt bezeichnet:

$$a_0 = \int_0^1 h f'\, dx , \qquad a_1 = \int_0^1 h^3 f'^2\, dx , \qquad a_2 = \int_0^1 h^3 f^2\, dx . \tag{19}$$

Setzt man die bestimmten Integrale a_0, a_1 und a_2 in (18) ein, so erhält man

$$\int_{-\beta}^{+\beta} [a_1 g^2 + a_2 g'^2 - 2\, a_0 g]\, d\zeta = \text{Min} .$$

Aus diesem Variationsproblem folgt die *Euler*gleichung

$$g'' - \frac{a_1}{a_2} g + \frac{a_0}{a_2} = 0 ,$$

deren Lösung sich unter Berücksichtigung der Randbedingungen zu

$$g(\zeta) = C_1 \left(1 - \frac{\mathfrak{Cof}\, \alpha\, \zeta}{\mathfrak{Cof}\, \alpha\, \beta}\right) \tag{20}$$

mit $\alpha^2 = a_1/a_2$ und $C_1 = a_0/a_2$ ergibt. Es muß also, um eine optimale Lösung für den Ansatz $p = f(x)\, g(\zeta)$ zu erhalten, für jede beliebige Funktion $f(x)$ die Funktion $g(\zeta)$ (20) gewählt werden. Die gleiche Untersuchung wird jetzt für $f(x)$ durchgeführt.

Eine beliebige Funktion für $g(\zeta)$, die die Randbedingungen $g(\pm\beta) = 0$ erfüllt, in das Variationsproblem (18) eingesetzt, läßt die Integration nach ζ zu. Die dabei auftretenden bestimmten Integrale werden wie folgt bezeichnet:

$$b_0 = \int_{-\beta}^{+\beta} g(\zeta)\, d\zeta , \qquad b_1 = \int_{-\beta}^{+\beta} g^2(\zeta)\, d\zeta , \qquad b_2 = \int_{-\beta}^{+\beta} g'^2(\zeta)\, d\zeta . \tag{21}$$

Es muß folgendes beachtet werden: Die Näherungsfunktion $p(x, \zeta)$ ist das Produkt der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(\zeta)$. Bei der Zerlegung der Funktion p in diese beiden Faktoren kann die eine Funktion mit einer Konstanten multipliziert und die andere Funktion durch die gleiche Konstante dividiert werden, ohne daß sich das Produkt $p(x, \zeta)$ dabei ändert. Wird nun $g(\zeta)$ mit (b_0/b_1) multipliziert und $b_0/b_1\, g(\zeta)$ für $g(\zeta)$ in das Gleichungssystem (21) eingesetzt, so ergeben die ersten beiden bestimmten Integrale dieses Gleichungssystems denselben Wert. Man kann daher unbeschadet der Allgemeinheit des Ansatzes annehmen, daß $g(\zeta)$ so gewählt ist, daß $b_0 = b_1$ wird. Führt man nun $b_0 = b_1$ und b_2 in (18) ein, so erhält man

$$\int_0^1 \left(h^3 f'^2 + h^3 \frac{b_2}{b_1} f^2 - 2\, h f'\right) dx = \text{Min} .$$

Aus diesem Variationsproblem folgt die *Euler*gleichung für die Funktion $f(x)$ zu

$$\frac{d}{dx}(h^3 f') - \frac{b_2}{b_1} h^3 f - \frac{dh}{dx} = 0 .$$

Differentiiert man aus und setzt die Beziehung für die Schmierspalthöhe ein [Gl. (12)], so wird

$$f'' - \frac{3}{e - x} f' - \frac{b_2}{b_1} f = -\frac{1}{\varepsilon^2 (e - x)^3} .$$

Setzt man $b_2/b_1 = 1/\varkappa$ und $c^2 = \varepsilon^2 \sqrt{\varkappa}$ und transformiert die Gleichung mit Hilfe von $(e - x)/\sqrt{\varkappa} = \xi$ auf die neue Veränderliche ξ, so ergibt sich

$$f'' + \frac{3}{\xi} f' - f = -\frac{1}{c^2 \xi^3} . \tag{22}$$

Die Randbedingungen dieser Gleichung lauten mit $e - 1 = \varphi$ und $e = \varphi + 1$ [vergl. (13)]

$$f = 0 \begin{cases} x = 0\,, & \xi = \dfrac{\varphi + 1}{\sqrt{\varkappa}}\,, \\ x = 1\,, & \xi = \dfrac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}}\,. \end{cases} \tag{23}$$

Mit Hilfe einer zweiten Transformation erhält man die *Bessel*sche Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{\xi}\,y' - \left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right) y = -\,\frac{1}{\xi^2}$$

mit

$$\xi = \frac{y}{c^2 f} \qquad \text{oder} \qquad f = \frac{y}{c^2\,\xi}\,, \tag{24}$$

deren homogene Lösung die Zylinderfunktion vom imaginären Argument und vom Index 1 ist.

$$y = Z_1(i\,\xi)$$

mit

$$Z_1(i\,\xi) = k_2\,I_1(i\,\xi) + k_3\,N_1(i\,\xi)\,.$$

Die inhomogene Lösung kann mit Hilfe des Ansatzes

$$y = \sum_0^\infty m_\nu\,\xi^{\varrho\,+\,\nu}$$

zu

$$y_P = 1 + \frac{1}{1\cdot 3}\,\xi^2 + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5}\,\xi^4 + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7}\,\xi^6 + \cdots \tag{25}$$

ermittelt werden. Damit ist bekannt, wie die Funktion $f(\xi)$ zu wählen ist, um das Variationsproblem (18) zu erfüllen

$$f(\xi) = \frac{1}{c^2\,\xi}\,[Z_1(i\,\xi) + y_P]\,. \tag{26}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung läßt sich der Druckverlauf des Schmierkeiles endlicher Breite geschlossen ausdrücken:

$$p = \frac{C_1}{\varepsilon^2\,\sqrt{\varkappa}\,\xi}\,[Z_1(i\,\xi) + y_P]\left(1 - \frac{\mathfrak{Cof}\,\alpha\,\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\alpha\,\beta}\right)$$

oder

$$p = \frac{C_1}{\varepsilon^2\,\sqrt{\varkappa}\,\xi}\,[k_2\,I_1(i\,\xi) + k_3\,N_1(i\,\xi) + y_P]\left(1 - \frac{\mathfrak{Cof}\,\alpha\,\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\alpha\,\beta}\right). \tag{27}$$

Die hier vorliegende Lösung für den Druck p im Schmiermittel wurde mit Hilfe eines Produktansatzes der Form $p = f(x)\,g(\zeta)$ unter gleichzeitiger Erfüllung des Minimalproblems nach Gl. (16) bestimmt. Man kann aus diesem Grunde die hier vorliegende Lösung als eine optimale Näherungslösung bezeichnen. Sie stellt die optimal mögliche (wegen Erfüllung des Minimalproblems) innerhalb der Bewegungsfreiheit des Ansatzes dar. Die Frage, inwieweit ein solcher Ansatz in der Lage ist, die tatsächlichen mechanischen Vorgänge zu beschreiben, ist nicht einfach zu beantworten. Produktansätze dieser Form haben sich jedoch bei vielen ähnlichen Problemen zur Gewinnung von Näherungslösungen gut bewährt[1].

In der zur Verfügung stehenden Funktionstafel von *Jahnke-Emde*[2] findet man die Funktionen $[-\,i\,I_1(i\,\xi)]$ und $\left[-\,\frac{\pi}{2}\,H_1^{(1)}(i\,\xi)\right]$ tabelliert. Es ist daher zweckmäßig, die Lösung (26) auf die tabellarisch vorhandenen Funktionen umzuschreiben. Man erhält dann für die Funktionen $f(\xi)$

$$f(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^2\,\sqrt{\varkappa}\,\xi}\left\{C_2\,[-\,i\,I_1(i\,\xi)] + C_3\left[-\,\frac{\pi}{2}\,H_1^{(1)}(i\,\xi)\right] + y_P\right\}$$

oder mit $\varepsilon^2 = \dfrac{H_0^2}{\varphi^2 L^2}$

$$f(\xi)\,\frac{H_0^2}{L^2} = \frac{\varphi^2}{\sqrt{\varkappa}\,\xi}\left\{C_2\,[-\,i\,I_1(i\,\xi)] + C_3\left[-\,\frac{\pi}{2}\,H_1^{(1)}(i\,\xi)\right] + y_P\right\}. \tag{28}$$

---

[1] Z. B. *C. Weber*, Z. angew. Math. Mech. 30 (1950), S. 112. — *C. Weber*, Profilrücknahme bei schrägverzahnten Rädern, Heft 11, Bericht 141 der Schriftenreihe Antriebstechnik, Braunschweig: Vieweg 1953.

[2] *E. Jahnke* u. *F. Emde*, Funktionstafel mit Formeln und Kurven, Leipzig 1948.

Für den Druckverlauf ergibt sich damit

$$p = \frac{C_1}{\varepsilon\,\sqrt{\varkappa}\,\xi}\left\{C_2\left[-\,i\;I_1\,(i\,\xi)\right] + C_3\left[-\frac{\pi}{2}\,H_1^{(1)}(i\,\xi)\right] + y_P\right\}\left(1 - \frac{\mathfrak{Cof}\,\alpha\,\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\alpha\,\beta}\right).$$

Bei dieser Umschreibung besteht zwischen C_2, C_3, k_2 und k_3 der Zusammenhang

$$C_2 = i\,k_2 - k_3 \qquad \text{und} \qquad C_3 = \frac{2\,i\,k_3}{\pi}.$$

Ersetzt man den dimensionslosen spezifischen Druck p durch den wirklichen spezifischen Druck P nach (11), so ergibt sich mit $\varepsilon^2 = H_0^2/L^2\varphi^2$

$$\frac{P\,H_0^2}{6\,\eta\,U\,L} = \frac{C_1\,\varphi^2}{\sqrt{\varkappa}\,\xi}\left\{C_2\left[-\,i\;I_1(i\,\xi)\right] + C_3\left[-\frac{\pi}{2}\,H_1^{(1)}(i\,\xi)\right] + y_P\right\}\left(1 - \frac{\mathfrak{Cof}\,\alpha\,\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\alpha\,\beta}\right). \tag{29}$$

Die Konstanten C_2 und C_3 bestimmen sich aus der Randbedingung (23)

$$f = 0 \quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\varphi + 1}{\sqrt{\varkappa}}, \\ \xi = \dfrac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}} \end{cases}$$

zu

$$\left.\begin{aligned} C_2 &= \frac{\begin{vmatrix} \left[-\frac{\pi}{2}\,H_1^{(1)}\left(i\,\frac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}}\right)\right] & y_P\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}}\right) \\ \left[-\frac{\pi}{2}\,H_1^{(1)}\left(i\,\frac{\varphi+1}{\sqrt{\varkappa}}\right)\right] & y_P\left(\frac{\varphi+1}{\sqrt{\varkappa}}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left[-i\,I_1\left(i\,\frac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}}\right)\right] & \left[-\frac{\pi}{2}\,H_1^{(1)}\left(i\,\frac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}}\right)\right] \\ \left[-i\,I_1\left(i\,\frac{\varphi+1}{\sqrt{\varkappa}}\right)\right] & \left[-\frac{\pi}{2}\,H_1^{(1)}\left(i\,\frac{\varphi+1}{\sqrt{\varkappa}}\right)\right] \end{vmatrix}}, \\ C_3 &= -\frac{\begin{vmatrix} \left[-i\,I_1\left(i\,\frac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}}\right)\right] & y_P\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}}\right) \\ \left[-i\,I_1\left(i\,\frac{\varphi+1}{\sqrt{\varkappa}}\right)\right] & y_P\left(\frac{\varphi+1}{\sqrt{\varkappa}}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \left[-i\,I_1\left(i\,\frac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}}\right)\right] & \left[-\frac{\pi}{2}\,H_1^{(1)}\left(i\,\frac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}}\right)\right] \\ \left[-i\,I_1\left(i\,\frac{\varphi+1}{\sqrt{\varkappa}}\right)\right] & \left[-\frac{\pi}{2}\,H_1^{(1)}\left(i\,\frac{\varphi+1}{\sqrt{\varkappa}}\right)\right] \end{vmatrix}}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Für die vorliegenden Betrachtungen interessiert weniger der Druckverlauf P als die Größe der Tragkraft für einen Schmierkeil von vorgegebener Länge und vorgegebener Breite. Die Tragkraft ergibt sich zu

$$T_1 = \int_0^L \int_{-\frac{B}{2}}^{+\frac{B}{2}} P\,dX\,d_3$$

oder mit $P = p\;6\,\eta\;U/L$, $dX = L\;dx$ und $d_3 = L\,d\zeta$

$$\frac{T_1}{6\,\eta\,U\,L} = \int_0^1 \int_{-\beta}^{+\beta} p\,dx\,d\zeta = \int_0^1 \int_{-\beta}^{+\beta} f(x)\,g(\zeta)\,dx\,d\zeta\,.$$

Mit Berücksichtigung der Transformationsgleichung $\xi = e - x/\sqrt{\varkappa}$ wird

$$\frac{T_1}{6\,\eta\,U\,L} = \sqrt{\varkappa} \int_{\frac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}}}^{\frac{\varphi+1}{\sqrt{\varkappa}}} \int_{-\beta}^{+\beta} f(\xi)\,g(\zeta)\,d\zeta\,d\xi\,.$$

Führt man nach (21) $\int_{-\beta}^{+\beta} g(\zeta)\, d\zeta = b_0$ ein, so wird

$$\frac{T_1}{6\,\eta\,U\,L} = \sqrt{\varkappa}\, b_0 \int_{\frac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}}}^{\frac{\varphi+1}{\sqrt{\varkappa}}} f(\xi)\, d\xi\,.$$

Die Integration von $f(\xi)$ nach (26) über ξ liefert den Ausdruck für die Tragkraft T_1

$$\frac{T_1}{6\,\eta\,U\,L} = \frac{b_0}{\varepsilon^2}\left[\int i\,Z_0(i\,\xi)\,d\xi - Z_1(i\,\xi) + A(\xi)\right]_{\frac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}}}^{\frac{\varphi+1}{\sqrt{\varkappa}}}. \tag{31}$$

Dabei ist

$$A(\xi) = \ln\xi + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\,\xi^2 + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,\xi^4 + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\,\xi^6 + \dots \tag{32}$$

Schreibt man (31) auf die in der Funktionentafel *Jahnke-Emde* tabellarisch vorhandenen Funktionen $[-i\,I_1(i\,\xi)]$, $[I_0(i\,\xi)]$, $\left[-\frac{\pi}{2}\,H_1^{(1)}(i\,\xi)\right]$ und $\left[\frac{i}{2}\,\pi\,H_0^{(1)}(i\,\xi)\right]$ um, so ergibt sich

$$\frac{T_1\,\varepsilon^2}{6\,\eta\,U\,L} = b_0\left\{C_2\left[\int\left(I_0(i\,\xi)\right)d\xi - \left(-i\,I_1(i\,\xi)\right)\right]\right.$$
$$\left. - C_3\left[\int\left(i\,\frac{\pi}{2}\,H_0^{(1)}(i\,\xi)\right)d\xi + \left(-\frac{\pi}{2}\,H_1^{(1)}(i\,\xi)\right)\right] + A(\xi)\right\}_{\frac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}}}^{\frac{\varphi+1}{\sqrt{\varkappa}}}.$$

Führt man in diese Gleichung noch den mittleren Flächendruck

$$\bar{p} = \frac{T_1}{B\,L}, \qquad \varepsilon^2 = \frac{H_0^2}{\varphi^2\,L^2} \quad \text{sowie} \quad \beta = \frac{B}{2\,L}$$

ein, so gewinnt man damit eine Beziehung für die Druckkennzahl $\left[\frac{\bar{p}\,H_0^2}{\eta\,U\,B}\right]$ des endlich breiten ebenen Schmierkeiles

$$\left[\frac{\bar{p}\,H_0^2}{\eta\,U\,B}\right] = \frac{3\,\varphi^2}{2\,\beta^2}\,b_0\left\{C_2\left[\int I_0(i\,\xi)\,d\xi - \left(-i\,I_1(i\,\xi)\right)\right]\right.$$
$$\left. - C_3\left[\int i\,\frac{\pi}{2}\,H_0^{(1)}(i\,\xi)\,d\xi + \left(-\frac{\pi}{2}\,H_1^{(1)}(i\,\xi)\right)\right] + A(\xi)\right\}_{\frac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}}}^{\frac{\varphi+1}{\sqrt{\varkappa}}}. \tag{33}$$

Zur Ermittlung der Druckkennzahlen nach (33) werden noch die bestimmten Integrale b_0, b_1 und b_2 benötigt. Sie ergeben sich zu

$$\left.\begin{aligned} b_0 &= \int_{-\beta}^{+\beta} C_1\left(1 - \frac{\mathfrak{Cof}\,\alpha\,\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\alpha\,\beta}\right)d\zeta = 2\,C_1\,\frac{1}{\alpha}\,(\alpha\,\beta - \mathfrak{Tg}\,\alpha\,\beta)\,,\\ b_1 &= \int_{-\beta}^{+\beta} C_1^2\left(1 - \frac{\mathfrak{Cof}\,\alpha\,\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\alpha\,\beta}\right)^2 d\zeta = C_1^2\,\frac{1}{\alpha}\left(2\,\alpha\,\beta - 3\,\mathfrak{Tg}\,\alpha\,\beta + \frac{\alpha\,\beta}{\mathfrak{Cof}^2\,\alpha\,\beta}\right),\\ b_2 &= \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{C_1^2\,\alpha}{\mathfrak{Cof}^2\,\alpha\,\beta}\,(-\mathfrak{Sin}^2\,\alpha\,\zeta)\,d\zeta = \frac{C_1^2\,\alpha^2}{\mathfrak{Cof}\,\alpha\,\beta}\left(\frac{1}{2\,\alpha}\,\mathfrak{Sin}\,2\,\alpha\,\beta - \beta\right). \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Die Bedingung $b_0 = b_1$ liefert eine Bestimmungsgleichung für C_1:

$$C_1 = \frac{2\,(\alpha\,\beta - \mathfrak{Tg}\,\alpha\,\beta)}{2\,\alpha\,\beta - 3\,\mathfrak{Tg}\,\alpha\,\beta + \frac{\alpha\,\beta}{\mathfrak{Cof}^2\,\alpha\,\beta}}. \tag{35}$$

Für $\varkappa = b_1/b_2$ erhält man aus den Gleichungen (34)

$$\varkappa = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{2\,\mathfrak{Sin}^2\,\alpha\beta}{\frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\beta\,\mathfrak{Cof}\,\alpha\beta}{\alpha\beta} - 1} - 3\right). \tag{36}$$

Die Ausdrücke für C_1, $\varkappa$ sowie b_0 sind Funktionen des Produktes $\alpha\beta$. Nimmt $\alpha\beta$ größere Werte als 4,6 an, so können für die genannten Ausdrücke vereinfachte Beziehungen angegeben werden. Der dabei auftretende Fehler ist kleiner als 0,01%. Es gilt für $\alpha\beta > 4{,}6$: $\mathfrak{Tg}\,\alpha\beta \approx 1$, $\mathfrak{Cof}\,\alpha\beta \approx \mathfrak{Sin}\,\alpha\beta$ und $\frac{\alpha\beta}{\mathfrak{Cof}^2\,\alpha\beta} \approx 0$ und damit

$$C_1 = \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha\beta - 1{,}5}, \qquad \varkappa = \frac{1}{\alpha^2}\,(2\,\alpha\beta - 3), \qquad b_0 = \frac{2}{\alpha}\,\frac{(\alpha\beta - 1)^2}{\alpha\beta - 1{,}5}. \tag{37}$$

Das in diesen Gleichungen vorkommende α ergibt sich aus der folgenden Beziehung:

$$\alpha^2 = \frac{a_1}{a_2}.$$

Darin sind a_1 und a_2 bestimmte Integrale nach (19):

$$a_1 = \int_0^1 h^3 f'^2\,dx,$$

$$a_2 = \int_0^1 h^3 f^2\,dx$$

Die Transformationsgleichung $e - x/\sqrt{\varkappa} = \xi$ liefert zusammen mit (12) den Ausdruck für den Schmierspalt h in Abhängigkeit von ξ

$$h = \varepsilon\sqrt{\varkappa}\cdot\xi. \tag{38}$$

Setzt man f' aus (26) zur Berechnung des bestimmten Integrales a_1 und f nach (26) zur Berechnung des bestimmten Integrales a_2 in die Gleichungen (19) ein, so führt die Integration auf Zylinderfunktionen vom Index 2 und 3. Da diese Funktionen tabellarisch nicht greifbar sind, werden für die Auswertung die bestimmten Integrale a_1 und a_2 numerisch berechnet. Da selbst f' eine Funktion von $Z_2(i\,\xi)$ ist, wird f' durch numerische Differentiation aus der Funktion $f(\xi)$ gefunden. Zur numerischen Differentiation läßt sich die Stirlingsche Formel verwenden. Die Integration zur Berechnung der bestimmten Integrale a_1 und a_2 kann mittels der *Simpson*schen Regel durchgeführt werden. Mit Hilfe der nunmehr vorliegenden Beziehungen läßt sich die Tragkraft bzw. die Druckkennzahl für den ebenen endlich breiten Schmierkeil berechnen.

4. Auswertung. Die Druckkennzahl $\left[\frac{\bar{p}\,H_0^2}{\eta\,U\,B}\right]$ nach (33) hängt von den Größen φ, β und $\varkappa$ ab. Da φ und β bekannt bzw. frei wählbar sind, muß die Auswertung mit der Bestimmung der $\varkappa$-Werte beginnen. Man erhält sie durch iterative Rechnung, die gut konvergiert, so daß man bei genügend genauer Anfangsschätzung des $\varkappa$-Wertes meist schon mit einem Schritt auskommt. Da β für die Berechnung der Druckkennzahl angenommen wird, ist $\varkappa$ nach (36) eine Funktion von α, und α^2 ist, wie oben erwähnt, der Quotient der bestimmten Integrale a_1 und a_2.

Zur Bestimmung des $\varkappa$-Wertes für einen Schmierkeil einer bestimmten Breite β und eines bestimmten Wertes $L_0/L = \varphi$ geht man zweckmäßigerweise so vor, daß man zunächst einen Wert für $\varkappa$ annimmt und mit diesem geschätzten Wert die Konstanten C_2 und C_3 nach (30) sowie die Funktion $f(\xi)$ nach (28) berechnet. Die zur Bestimmung der Konstanten C_2 und C_3 sowie der Druckfunktion $f(\xi)$ benötigten Funktionen $[-i\,I_1(i\,\xi)]$, $\left[-\frac{\pi}{2}\,H_1^{(1)}(i\,\xi)\right]$ können der Funktionentafel von *Jahnke-Emde* entnommen werden. Die zu diesem Zweck ebenfalls erforderliche Funktion y_p wurde nach (25) berechnet und in Tab. 1 niedergelegt. Die Ableitung $f'(\xi)$ kann nach der *Stirling*schen Formel oder auch durch graphisches Differentiieren bestimmt werden. Mit den bekannten Werten für $f(\xi)$, $f'(\xi)$ und $h(\xi)$ lassen sich dann die Integranden der bestimmten Integrale a_1 und a_2 berechnen. Die Integration in den Grenzen

$$x = 0 \to \xi = \frac{\varphi + 1}{\sqrt{\varkappa}},$$

$$x = 1 \to \xi = \frac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}}$$

Tabelle 1. *Funktionen* $y_p(\xi)$ *und* $A(\xi)$ *nach Gl.* (25) *und* (32).

ξ	$Y_p(\xi)$	$A(\xi)$	ξ	$Y_p(\xi)$	$A(\xi)$	ξ	$Y_p(\xi)$	$A(\xi)$
0,00	+ 1,00000	$-\infty$	1,90	+ 2,52453	+ 1,3211	3,90	+ 14,0767	+ 5,6314
0,05	+ 1 00083	— 2,9954	2,00	+ 2,7321	+ 1,4558	4,00	+ 15,4022	+ 6,0030
0,10	+ 1,00333	— 2,3009	2,10	+ 2,9607	+ 1,5945	4,10	+ 16,8576	+ 6,4033
0,20	+ 1,01337	— 1,6028	2,20	+ 3,2117	+ 1,7378	4,20	+ 18,4529	+ 6,8251
0,30	+ 1,03018	— 1,1890	2,30	+ 3,4876	+ 1,8866	4,30	+ 20,2035	+ 7,2806
0,40	+ 1,05390	— 0,8895	2,40	+ 3,7904	+ 2,0415	4,40	+ 22,3152	+ 7,7658
0,50	+ 1,08471	— 0,6511	2,50	+ 4,1227	+ 2,2027	4,50	+ 24,2305	+ 8,2886
0,60	+ 1,12290	— 0,4501	2,60	+ 4,4876	+ 2,3716	4,60	+ 26,5291	+ 8,8551
0,70	+ 1,16867	— 0,2737	2,70	+ 4,8875	+ 2,5482	4,70	+ 29,0783	+ 9,4413
0,80	+ 1,22260	— 0,1176	2,80	+ 5,3263	+ 2,7339	4,80	+ 31,8623	+ 10,0888
0,90	+ 1,28494	+ 0,0332	2,90	+ 5,8071	+ 2,9293	4,90	+ 34,9174	+ 10,7713
1,00	+ 1,35618	+ 0,1724	3,00	+ 6,3350	+ 3,1346	5,00	+ 38,2707	+ 11,5063
1,10	+ 1,43696	+ 0,3055	3,10	+ 6,9139	+ 3,3515	5,20	+ 45,9949	+ 13,1668
1,20	+ 1,52797	+ 0,4341	3,20	+ 7,5484	+ 3,5813	5,40	+ 55,3022	+ 15,0585
1,30	+ 1,62985	+ 0,5603	3,30	+ 8,2436	+ 3,8236	5,60	+ 66,5290	+ 17,2613
1,40	+ 1,74360	+ 0,6875	3,40	+ 9,0064	+ 4,0829	5,80	+ 80,0652	+ 19,8448
1,50	+ 1,87024	+ 0,8102	3,50	+ 9,8429	+ 4,3540	6,00	+ 96,3866	+ 22,9004
1,60	+ 2,01005	+ 0,9354	3,60	+ 10,7595	+ 4,6434			
1,70	+ 2,16500	+ 1,0614	3,70	+ 11,7648	+ 4,9504			
1,80	+ 2,33602	+ 1,1899	3,80	+ 12,8669	+ 5,2810			

wird mit Hilfe der *Simpson*schen Regel durchgeführt. Sie liefert die bestimmten Integrale a_1 und a_2. Aus der Division von a_1 und a_2 folgt α^2. Das mit dem so bestimmten α aus (36) ermittelte $\varkappa$ muß mit dem geschätzten Wert für $\varkappa$ übereinstimmen, gegebenenfalls ist die Rechnung zu wiederholen. Ist eine Übereinstimmung des geschätzten $\varkappa$-Wertes mit dem gerechneten erreicht, läßt sich jetzt die Druckkennzahl nach (33) berechnen.

Beispiel: Es soll die Druckkennzahl $\left[\frac{\bar{p}\,H_0^2}{\eta\,U\,B}\right]$ für $\beta = 0{,}5$ und $\varphi = 0{,}8$ berechnet werden. $\varkappa$ wird geschätzt zu $\varkappa = 0{,}0961$, $\sqrt{\varkappa} = 0{,}31$. Für die Integrationsgrenzen ergibt sich $\varphi/\sqrt{\varkappa} = 2{,}5800$ und $(\varphi + 1)/\sqrt{\varkappa} = 5{,}806$. Mit diesen Werten werden die Konstanten C_2 und C_3 nach (30) bestimmt. Es ergibt sich: $C_2 = -1{,}570977$ und $C_3 = -2{,}399772$. Die Ergebnisse der Berechnungen von ξ, $h\,L/H_0$, $f(\xi)\,H_0/L^2$, $f'(\xi)\,H_0/L^2$ sowie der Integranden $(H_0/L)\,f^2(\xi)\,h^3$ und $(H_0/L)\,f'^2(\xi)\,h^3$ der bestimmten Integrale a_2 und a_1 sind in Tab. 2 niedergelegt. Hieraus lassen sich die bestimmten

Tabelle 2. *Ergebnisse der Berechnungen von* ξ, $\frac{h\,L}{H_0}$, $f\frac{H_0}{L^2}$, $f'\frac{H_0}{L^2}$, *sowie der Integranden* $\frac{H_0}{L}f^2h^3$ *und* $\frac{H_0}{L}f'^2h^3$.

$\varkappa$	ξ	$\frac{h\,L}{H_0}$	$\left(\frac{h\,L}{H_0}\right)^3$	$\frac{H_0^2}{L^2}\cdot f(\xi)$	$\frac{H_0^2}{L^2}f'(\xi)$	$\frac{H_0}{L}f^2(\xi)\,h^3$	$\frac{H_0}{L}f'^2(\xi)\,h^3$
0,0	5,8060	2,250	11,390	0,00000	— 0,01460	0,000000	0,002427
0,1	5,4834	2,125	9,596	0,00469	— 0,01492	0,000211	0,002136
0,2	5,1608	2,000	8,000	0,00963	— 0,01583	0,000742	0,002004
0,3	4,8382	1,875	6,591	0,01456	— 0,01562	0,001397	0,001608
0,4	4,5156	1,750	5,359	0,01969	— 0,01550	0,002077	0,001287
0,5	4,1930	1,625	4,291	0,02436	— 0,01518	0,002546	0,000988
0,6	3,8704	1,500	3,375	0,02821	— 0,00872	0,002685	0,000256
0,7	3,5478	1,375	2,600	0,02967	+ 0,00101	0,002288	0,000002
0,8	3,2252	1,250	1,953	0,02660	+ 0,02045	0,001381	0,000816
0,9	2,9026	1,125	1,424	0,01686	+ 0,04075	0,000405	0,002364
1,0	2,5800	1,000	1,000	0,00000	+ 0,07130	0,000000	0,005083

Integrale a_1 und a_2 und daraus α berechnen:

$$a_2 = \frac{\sqrt{\varkappa}\,H_0}{L} \cdot 0{,}3226 \cdot 0{,}013732\,,$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{\varkappa}\,H_0}{L} \cdot 0{,}3226 \cdot 0{,}015213\,,$$

$$\alpha = 1{,}052,\ \alpha\,\beta = 0{,}526\,.$$

Aus (36) folgt dann $\varkappa = 0{,}0995$.

Würde man die Rechnung noch einmal wiederholen, so würde das neu berechnete $\varkappa$ sich kaum von dem jetzt gefundenen unterscheiden. Auch der Wert für α wird in einem weiteren Iterationsschritt nur unwesentlich verändert. Mit dem $\varkappa$-Wert von $\varkappa = 0{,}0995$ kann jetzt die Druckkennzahl (33) berechnet werden. Es ist

$$\varkappa = 0{,}0995\,, \qquad \sqrt{\varkappa} = 0{,}3154\,, \qquad \varphi = 0{,}8\,, \qquad \beta = 0{,}5\,.$$

Zur Auswertung der Gleichung (33) muß noch die Funktion $A(\xi)$ (32) bekannt sein. $A(\xi)$ wurde für die Werte $\xi = 0 \div 6$ berechnet und in Tab. 1 niedergelegt.

Mit $\varphi/\sqrt{\varkappa} = 2{,}5364$ und $(\varphi+1)/\sqrt{\varkappa} = 5{,}707$ ergibt sich

$$\left[-i\,I_1\left(i\,\frac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}}\right)\right] = 2{,}6022\,, \qquad \left[-\frac{\pi}{2}\,H_1^{(1)}\left(i\,\frac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}}\right)\right] = 0{,}07076\,,$$

$$\left[-i\,I_1\left(i\,\frac{\varphi+1}{\sqrt{\varkappa}}\right)\right] = 46{,}7512\,, \qquad \left[-\frac{\pi}{2}\,H_1^{(1)}\left(i\,\frac{\varphi+1}{\sqrt{\varkappa}}\right)\right] = 0{,}001853\,,$$

$$y_P\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}}\right) = 4{,}25368\,, \qquad A\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\varkappa}}\right) = 2{,}26418\,,$$

$$y_P\left(\frac{\varphi+1}{\sqrt{\varkappa}}\right) = 73{,}47441\,, \qquad A\left(\frac{\varphi+1}{\sqrt{\varkappa}}\right) = 18{,}63152\,.$$

Die Konstanten C_2 und C_3 werden neu zu $C_2 = -1{,}571512$ und $C_3 = -2{,}321784$ berechnet. Für die Integrale $\int I_0(i\,\xi)\,d\xi$ und $\int i\,\frac{\pi}{2}\,H_0^{(1)}(i\,\xi)\,d\xi$ ergibt sich aus der Funktionentafel von *Jahnke-Emde*:

$$\int_{2{,}5364}^{5{,}707} I_0(i\,\xi)\,d\xi = 54{,}5234\,,$$

$$\int_{2{,}5364}^{5{,}707} i\,\frac{\pi}{2}\,H_0^{(1)}(i\,\xi)\,d\xi = 0{,}050669\,.$$

Mit $\alpha\,\beta = 0{,}526$ folgt aus (35)

$$C_1 = 10{,}04714$$

und nach (34)

$$b_0 = 0{,}834526\,.$$

Mit diesen Werten wurde die Druckkennzahl (33) zu

$$\left[\frac{\bar{p}\,H_0^2}{\eta\,U\,B}\right] = 0{,}0688$$

gefunden.

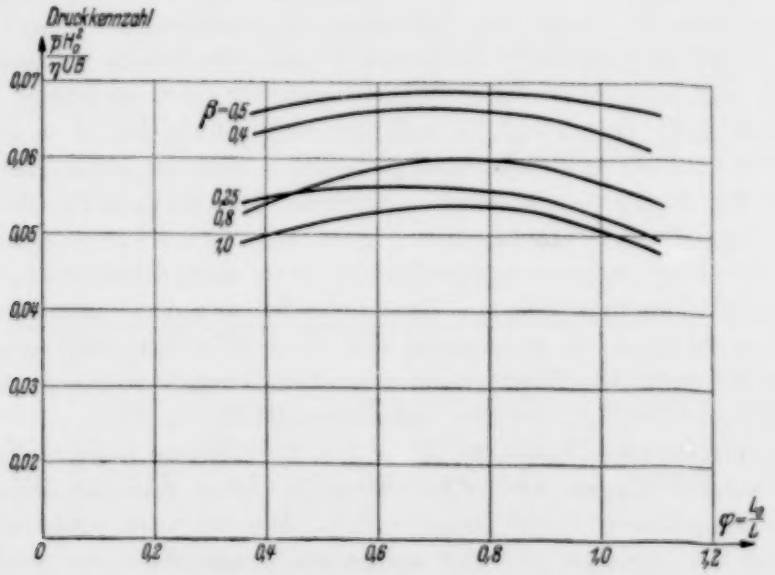


Abb. 8. Druckkennzahlen für den endlich breiten Gleitschuh in Abhängigkeit von φ mit dem Breitenverhältnis β als Parameter.

Die auf diese Weise vorgenommene Auswertung der Gleichung für die Tragkraft des Schmierkeiles endlicher Breite erstreckt sich auf die φ-Werte $\varphi = 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8;\ 1{,}0$ und auf die Breitenverhältnisse $\beta = 0{,}25;\ 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}8;\ 1{,}0$.

Das Ergebnis dieser umfangreichen Berechnungen ist in den Abb. 8 und 9 dargestellt. Es ergibt sich aus diesen Auftragungen, daß die größte Druckkennzahl und damit der größte Flächendruck $\bar{p}$ für die untersuchten Breitenverhältnisse im Bereich $\varphi = 0{,}8$ bis 0,6 auftritt. Das optimale Breitenverhältnis ergibt sich aus dieser Untersuchung zu $\beta = 0{,}5$. Der maximal erreichbare Flächendruck $\bar{p}$ und damit die größte Tragkraft des endlich breiten Schmierkeiles wird sich demnach bei einem Breitenverhältnis $\beta = 0{,}5$, d. h. $B/L = 1$ und für $\varphi = 0{,}8 \div 0{,}6$ einstellen. Man wird daher die Unterteilung eines endlich breiten Schmierkeiles stets so vornehmen, daß quadratische Teilflächen entstehen. Da das Tragkraftmaximum in Richtung der beiden Veränderlichen β und φ recht flach

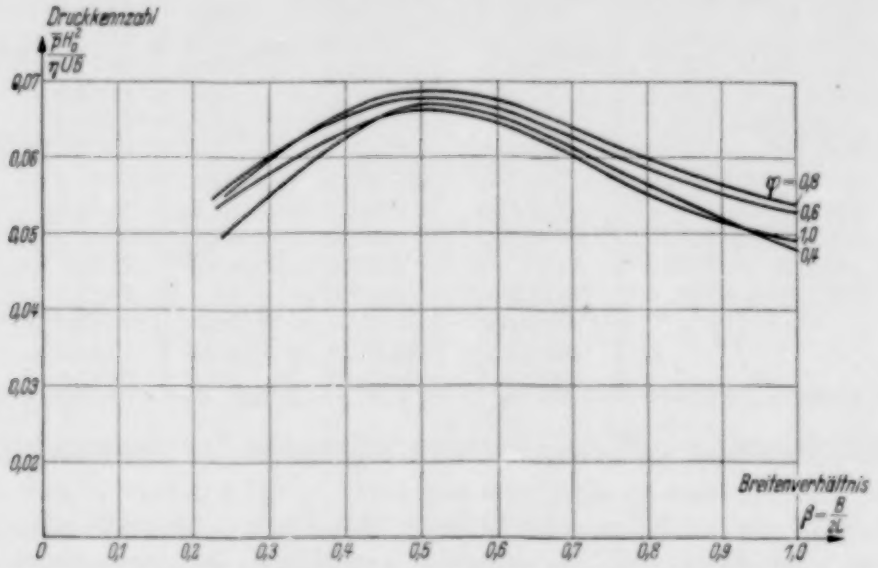


Abb. 9. Druckkennzahlen für den endlich breiten Gleitschuh in Abhängigkeit von β mit φ als Parameter.

verläuft, ergeben etwas abweichende Werte für β und φ noch recht hohe Tragkräfte. Vergleicht man die nach diesem Verfahren berechneten Druckkennzahlen mit den nach der exakten Lösung von *Frössel*[1] berechneten Werten, so ergeben sich hier etwas höhere Flächendrücke. Der Unterschied beträgt etwa 2—4%. Das Ergebnis dieser Untersuchung, das maximale Flächendrücke beim endlich breiten Schmierkeil dann erreicht werden, wenn ein Seitenverhältnis der Teilfläche $B/L = 1$ und ein Keilsteigungsmaß $\varphi = 0{,}8 \div 0{,}6$ eingehalten wird, stimmt mit dem im einleitenden Abschnitt zitierten Schrifttum überein.

5. Das unterteilte Gleitlager. Bei der Betrachtung der unterteilten Gleitlager ist im Rahmen dieser Arbeit in erster Linie die Frage von Interesse, ob bei schmalen Lagern durch Unterteilung der Gleitfläche eine Tragkraftsteigerung zu erreichen ist. Die Beantwortung dieser Frage gelingt durch einen Vergleich der Tragkräfte bzw. Belastungskennzahlen zwischen dem unterteilten und dem zylindrischen Gleitlager. Der Vergleich soll hier an Halbschalen, d. h. an 180°-Lagern durchgeführt werden. Dabei wird für das mehrflächige Gleitlager die in der Einleitung angeführte Bauform 3 gewählt. Bei der Bauform 3 sind die einzelnen Gleitflächen durch entsprechende Formgebung einer starren Lagerbuchse entstanden.

Trägt man den Verlauf der Schmierspaltdicke bei einem mehrflächigen Gleitlager über der Teilflächenlänge auf, so stellt man fest, daß der Unterschied gegenüber einem ebenen Schmierkeil mit linearem Spaltverlauf nicht groß ist. Man kann also die Teilflächen des Lagers in erster Näherung als ebene Gleitschuhe von endlicher Breite auffassen. Mit dieser vereinfachenden Annahme können die Tragkräfte unterteilter Gleitlager relativ einfach ermittelt werden.

In Abb. 10 ist ein unterteiltes Halblager für $n = 6$ Teilflächen dargestellt. Die maximal mögliche Tragkraft eines solchen Lagers wird dann erreicht, wenn man für die als ebene Gleitschuhe aufgefaßten Teilflächen optimale Verhältnisse wählt. Die im vorhergehenden Abschnitt durchgeführte Untersuchung hat ergeben, daß die maximale Tragkraft eines ebenen Gleitschuhes von endlicher Breite dann erreicht wird, wenn er ein Breitenverhältnis $B/L = 1$ und ein Keilsteigungsmaß $\varphi = L_0/L = 0{,}8$ aufweist.

Um das Maximum an Tragkraft beim mehrflächigen Gleitlager zu erhalten, denkt man sich ein solches Lager aus Gleitschuhen vom Breitenverhältnis $B/L = 1$ und der Keilneigung $\varphi = 0{,}8$ auf-

[1] *W. Frössel*, Z. angew. Math. Mech. 21 (1941) S. 321.

gebaut. In diesem Fall ergibt sich für die Druckkennzahl einer Teilfläche der Maximalwert $\left[\frac{\bar{p} H_0^2}{\eta U B}\right] = 0{,}069$. Die Tragkraft einer Teilfläche wird dann

$$T_1 = 0{,}069 \frac{\eta U B^3}{H_0^2} \quad \text{mit} \quad \bar{p} = \frac{T_1}{B^2}. \quad \text{da} \quad B = L.$$

Die Gesamttragkraft des mehrflächigen Lagers ergibt sich durch vektorielle Addition der Teilkräfte T_1. Vernachlässigt man die von der Welle auf das Schmiermittel übertragenen Schubkräfte, so müssen die Teilkräfte T_1 durch den Wellenmittelpunkt gehen. Da sämtliche Teilflächen den gleichen Schmierspaltverlauf haben, beträgt der Winkel zwischen den Teilkräften π/n. Die Gesamttragkraft T ergibt sich dann immer als Eckmaß aus dem mit T_1 als Seite gebildeten $(2\,n)$-Eck. Es gilt daher

$$T = \frac{T_1}{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]}.$$

Setzt man für den mittleren Flächendruck $p_m = T/B\,D$ und für das Breitenverhältnis des Lagers $\sigma = B/D$, so ergibt sich der auf den Durchmesser D bezogene mittlere Flächendruck eines mehrflächigen Halblagers zu

$$\left[\frac{p_m H_0^2}{\eta U D}\right] = \frac{0{,}069\,\sigma^2}{\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]}. \tag{39}$$

Die für eine Teilflächenlänge einschließlich Schmiernut zur Verfügung stehende Strecke beträgt $\pi D/2\,n$. Nimmt man an, daß von dieser Strecke nur der i-fache Betrag als Teilflächenlänge genutzt werden kann, dann ergibt sich die Länge einer Teilfläche

$$L = \frac{\pi D}{2\,n}\, i\,.$$

Mit $B = L$ läßt sich hieraus das Breitenverhältnis des Lagers berechnen

$$\sigma = \frac{B}{D} = \frac{\pi\, i}{2\,n}. \tag{40}$$

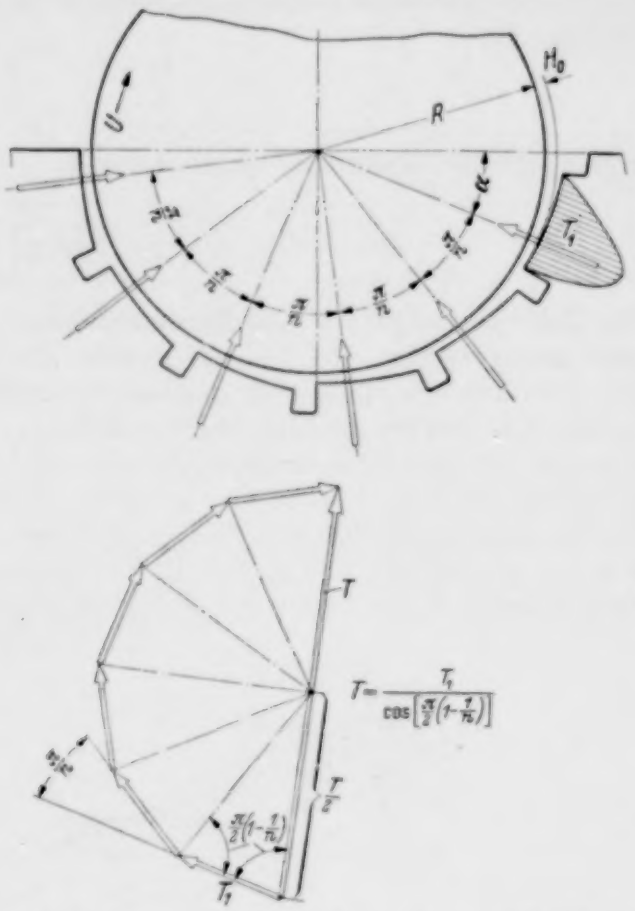


Abb. 10. Bestimmung der Tragkraft für ein unterteiltes Halblager der Teilflächenzahl $n = 6$.

Setzt man zur Auswertung der Gleichung (39) $i = 0{,}8$, d. h. 20% der zur Verfügung stehenden Gesamtlänge werden für die Schmiernutbreite verwandt, so lassen sich für verschiedene Teilflächenzahlen die maximal möglichen Druckkennzahlen des unterteilten Halblagers nach (39) berechnen. Es ergibt sich

$n \rightarrow$	3	4	5	6	7	8
σ	0,420	0,314	0,252	0,210	0,180	0,157
$\left[\frac{p_m H_0^2}{\eta U D}\right]$	0,02435	0,0178	0,01418	0,01177	0,01002	0,00875

Die Tragkraftkennzahlen des unterteilten Halblagers nehmen mit zunehmender Teilflächenzahl ab. Für den Vergleich des unterteilten Halblagers mit der zylindrischen Halbschale kann die bekannte Veröffentlichung von *Sassenfeld* und *Walther*[1] herangezogen werden. Hier liegen umfangreiche Berechnungen der *Sommerfeld*-Zahlen *So* in Abhängigkeit vom Breitenverhältnis $\sigma = B/D$

[1] *H. Sassenfeld* u. *A. Walther*, Gleitlagerberechnungen, VDI-Forschungsheft 441, Düsseldorf 1954.

und von der relativen Exzentrizität χ vor. Die die Belastung kennzeichnende Größe ist beim zylindrischen Halblager die *Sommerfeld*-Zahl *So*. Es gilt

$$So = \frac{P\,\psi^2}{B\,D\,\eta\,\omega}, \qquad \psi = \frac{R_s - R}{R}, \qquad \chi = \frac{\varepsilon}{R_s - R}.$$

Hierin bedeutet P die Tragflähigkeit des Gleitlagers in kg, ψ das relative Lagerspiel, R_s den Radius der Lagerschale, R den Wellenradius, ω die Winkelgeschwindigkeit und ε die Exzentrizität der Welle. Zum Vergleich beider Lagerarten ist es erforderlich, die Sommerfeldzahl in die hier verwendete Tragkraftkennzahl $\left[\frac{p_m H_0^2}{\eta\,U\,D}\right]$ umzurechnen. Dabei ist zu beachten, daß ein Vergleich beider Lagerarten nur dann sinnvoll ist, wenn er auf der Basis gleicher minimaler Schmierschichtdicke H_0 erfolgt. Mit

$$U = \frac{D}{2}\,\omega, \qquad \frac{\psi\,D}{2} = \frac{H_0}{1-\chi}, \qquad p_m = \frac{P}{B\,D}$$

ergibt sich die Umrechnungsgleichung zu

$$\left[\frac{p_m H_0^2}{\eta\,U\,D}\right] = So\,\frac{(1-\chi)^2}{2}. \tag{41}$$

Mit Hilfe der so gefundenen Zusammenhänge kann der Vergleich zwischen beiden Lagerarten vorgenommen werden. In Abb. 11 werden die Druckkennzahlen der unterteilten Halbschale denen der zylindrischen Halbschale gegenübergestellt. Die letzteren ergeben sich durch Umrechnung der *Sommerfeld*-Zahlen aus der Veröffentlichung von *Sassenfeld* und *Walther* nach (41). Bei der Auftragung der Druckkennzahlen für das zylindrische Halblager in Abb. 11 erscheint die relative Exzentrizität χ als Parameter. χ kennzeichnet in diesem Fall diejenige relative Exzentrizität, bei der das zylindrische Lager die minimale Vergleichsschmierfilmdicke H_0 erreicht. Die Tragzahlkurven Kurven der großen χ-Werte stellen demnach die Lager mit großem Lagerspiel dar, während die der kleinen χ-Werte Lager mit geringerem Lagerspiel bedeuten.

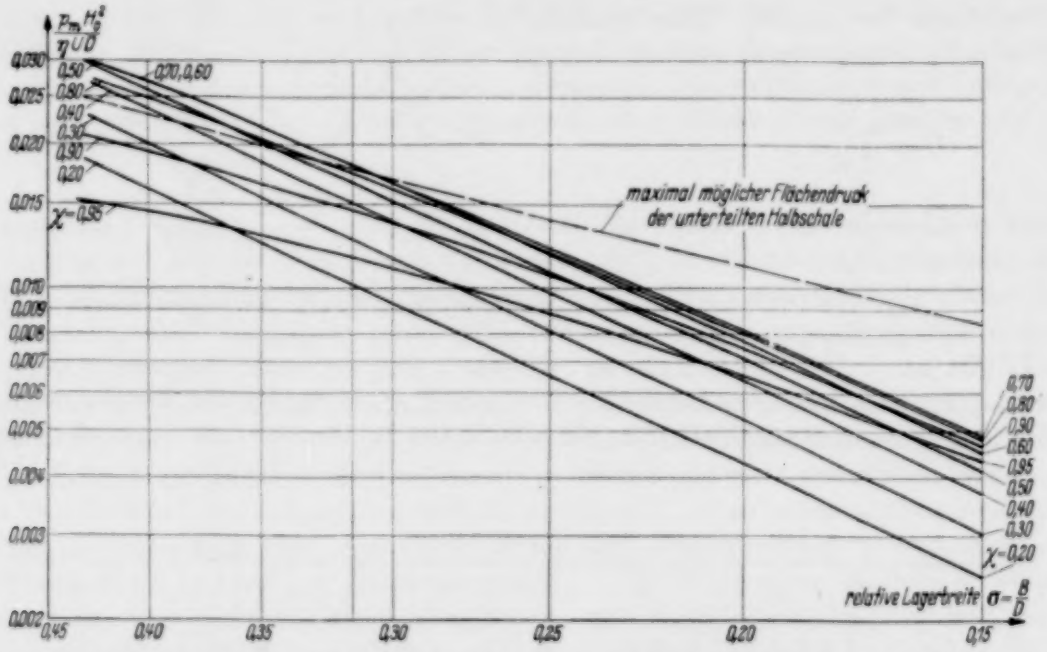


Abb. 11. Mittlere Flächendrücke für die unterteilte Halbschale und die zylindrische Halbschale mit χ als Parameter.

Die Auftragung in Abb. 11 zeigt, daß bei den χ-Werten 0,95; 0,9; 0,3; 0,2, d. h. für Lager der großen und der kleinen Lagerspiele im ganzen untersuchten Bereich ($0{,}42 \leqq \sigma \leqq 0{,}15$), das unterteilte Lager hinsichtlich der Tragkraft im Vorteil ist. Die mögliche Tragkraftsteigerung, die das unterteilte Lager gegenüber dem jeweiligen zylindrischen Lager zuläßt, ist in Abb. 12 dargestellt. Sie beträgt in diesem Fall bei geringer Lagerbreite $\sigma = 0{,}15$ und $\chi = 0{,}2$ über 200%, während sie bei $\chi = 0{,}95$ und $\sigma = 0{,}15$ ca. 90% ausmacht. Das Lager $\chi = 0{,}7$ nähert sich am meisten der Tragkraftkurve des unterteilten Lagers. Es stellt unter den zylindrischen Lagern etwa das Optimum dar. Für ein Breitenverhältnis $\sigma < 0{,}3$ wird aber auch dieses Lager vom unterteilten

Lager übertroffen. Vergleicht man nun das optimale zylindrische Halblager $\chi = 0{,}7$ mit dem optimalen mehrflächigen Halblager, so ergibt sich, daß die Überlegenheit des unterteilten Lagers etwa bei dem Breitenverhältnis $\sigma = 0{,}3$ beginnt und mit kleineren Breitenverhältnissen weiter ansteigt. Die möglichen Tragkraftsteigerungen durch Einsatz von unterteilten Lagern betragen bei dem jeweiligen Breitenverhältnis etwa

$$\sigma = \frac{B}{D} = \quad 0{,}3 \quad 0{,}25 \quad 0{,}20 \quad 0{,}15\,,$$

$$\text{Steigerung} = \quad 2\% \quad 17\% \quad 28\% \quad 74\%\,.$$

Aus diesen Prozentzahlen geht hervor, daß der Einsatz von mehrflächigen Lagern in der Praxis wohl erst für Breitenverhältnisse, die kleiner sind als 0,25 zu erwägen ist.

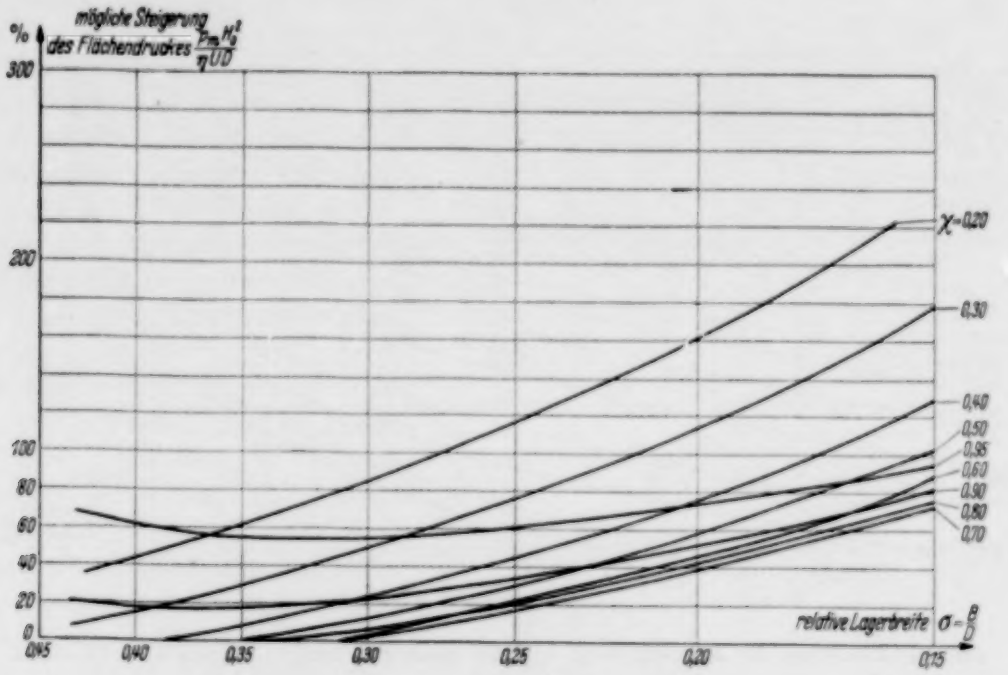


Abb. 12. Mögliche Steigerung des Flächendruckes $\left[\frac{P_m H_0^2}{\eta U D}\right]$ bei Anwendung des unterteilten Halblagers gegenüber dem zylindrischen Halblager mit χ als Parameter.

Von *Shaw* und *Macks*[1] wird die Ansicht vertreten, daß es vom Standpunkt steigender Tragfähigkeit bzw. abnehmenden Seitenflusses wünschenswert sei, möglichst breite normale, d. h. nicht unterteilte Lager einzusetzen. Der Einsatz breiter Lager stößt jedoch auf Schwierigkeiten, da die auftretende Wellendurchbiegung das Lagerspiel zum Verschwinden bringt. Aus diesem Grunde empfiehlt es sich nach *Shaw* und *Macks*, schmale Lager zu verwenden und zur Herabsetzung des Seitenflusses, d. h. zur Erhöhung der Tragfähigkeit die Gleitfläche in eine Anzahl von quadratischen Teilflächen aufzuteilen. Diese Ansicht, daß die im Lager auftretende Wellendurchbiegung den Einsatz schmaler Lager erfordert, ist heute nicht mehr haltbar. *Buske*[2] hat in seinen Versuchen eindeutig nachgewiesen, daß sich der Lagerwerkstoff den Durchbiegungen der Welle weitgehend anpaßt. So wurden z. B. im Prüflager ($B/D = 1$), obgleich der Biegepfeil bereits den vierfachen Wert der geringsten Schmierschichtstärke betrug, noch hydrodynamische Betriebsbedingungen nachgewiesen. Bei auftretenden Durchbiegungen dringt die Welle in den Bereich der Lagerschale ein, d. h. der Lagerwerkstoff gibt nach. Wie auch von *Vogelpohl*[3] formuliert, lassen sich die Wellendurchbiegungen beherrschen. Dies gilt im allgemeinen auch bei größeren Lagerbreiten, wenn die von *Buske* erarbeiteten konstruktiven Maßnahmen Berücksichtigung finden.

Zusammengefaßt ergibt sich, daß nicht die Wellendurchbiegung im Lager als verantwortliches Kriterium für den Einsatz schmaler Lager anzusehen ist, sondern ihre Verwendung erfolgt nur bei besonderen konstruktiven Gegebenheiten, wie z. B. Raummangel. In diesem Fall ergibt sich eine

[1] *M. C. Shaw* u. *E. F. Macks*, Analysis and Lubrication of Bearings, New York 1949.
[2] *A. Buske*, Stahl u. Eisen, 71 (1951), S. 1420.
[3] *G. Vogelpohl*, Über die Tragfähigkeit von Gleitlagern und ihre Berechnung, Forschungsbericht Nr. 263 des Ministeriums f. Wirtschaft u. Verkehr des Landes Nordhr.-Westfalen, Köln u. Opladen 1956.

Überlegenheit der mehrflächigen Lager hinsichtlich der Tragkraft nur für Breitenverhältnisse $B/D < 0{,}25$.

Von *Boyd* und *Raimondi*[1] wurden mehrflächige Gleitlager nach Bauart 2 mit 4, 6, 8 und 12 Gleitkörpern untersucht. Das dort gewonnene Ergebnis, daß eine Überlegenheit der mehrflächigen Lager bei einem Breitenverhältnis von $B/D < 0{,}3$ beginnt, stimmt etwa mit dem hier gefundenen Wert überein.

6. Die Berechnung von Gleitlagern geringer Breite. Zur Aufstellung von Unterlagen für die Berechnung schmaler Gleitlager sind in Abb. 13 die Werte $So\,(1-\chi)$ über χ mit dem Breitenverhältnis σ als Parameter aufgetragen. Dabei wurde die Erkenntnis von *Kochanowsky*[2], daß der Grenz-

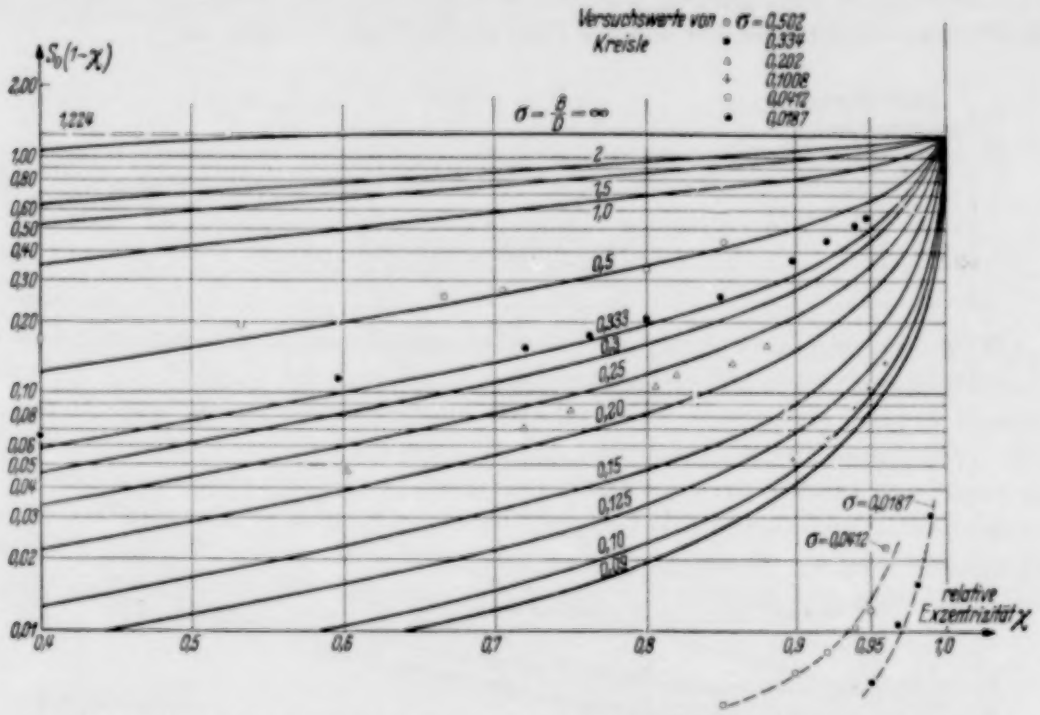


Abb. 13. Auftragung der Kennzahl $So\,(1-\chi)$ über χ mit dem Breitenverhältnis σ als Parameter.

wert $So\,(1-\chi)$ für $\chi \to 1$ und alle Breitenverhältnisse dem Wert 1,224 zustrebt, berücksichtigt. Als Grundlage für diese Auftragung dienten die von *Sassenfeld* und *Walther* berechneten *Sommerfeld*-Zahlen. Abb. 14 enthält aus den gleichen Unterlagen die hier verwendete Druckkennzahl $\left[\frac{p_m H_0^2}{\eta U D}\right]$ über χ mit σ als Parameter.

Die Ergebnisse der in einer neueren amerikanischen Arbeit von *Kreisle*[3] experimentell untersuchten Lager der Breitenverhältnisse $\sigma = 0{,}502$; 0,334; 0,202; 0,1008; 0,0412 und 0,0187 sind in den Abbildungen 13 und 14 den rechnerischen Werten gegenübergestellt. Es besteht, wie die Auftragungen zeigen, eine recht gute Übereinstimmung. Abb. 13 und 14 bilden die Grundlage für die Berechnung schmaler Gleitlager, deren Gang abschließend kurz skizziert werden soll.

Ein Gleitlager arbeitet dann betriebssicher, wenn die Belastung kleiner ist als die Belastungsgrenze P_{grenz}, bei der das Lager den Zustand der Mischreibung erreicht. Sind das relative Lagerspiel ψ und die Gesamtrauhigkeitshöhe von Lagerschale und Welle h_{zul} bekannt, so läßt sich daraus die relative Exzentrizität χ_{grenz}, bei der das Lager in die Mischreibung geht, berechnen. Es gilt

$$\chi_{grenz} = 1 - \frac{2\,h_{zul}}{\psi\,D}. \tag{42}$$

Mit χ_{grenz} kann bei dem jeweiligen Breitenverhältnis σ in Abb. 14 die zugehörige Druckkennzahl der Tragfähigkeitsgrenze $\left[\frac{p_m H_0^2}{\eta U D}\right] = \text{konst.}$ abgelesen werden. Hieraus läßt sich dann die Grenztragfähigkeit zu

$$P_{grenz} = \frac{\text{konst}\,D^3\,B\,\pi}{60\,h_{zul}^2}\,\eta\,n \tag{43}$$

[1] *J. Boyd* u. *A. A. Raimondi*, Mechanical Engineering 75 (1953), S. 380.
[2] *W. Kochanowsky*, Schmiertechnik 2 (1955), H. 4.
[3] *L. F. Kreisle*, Transactions of ASME (1956) S. 955.

berechnen. Darin ist η die im Lager auftretende mittlere Viskosität des Schmiermittels und n die Wellendrehzahl in U/min. Da η von der Temperatur abhängt, ist die Kenntnis der sich einstellenden Lagertemperatur erforderlich. Sie läßt sich aus der Wärmebilanz des Lagers ermitteln. Es ergibt sich z. B. für $So > 1$

$$\vartheta - \vartheta_0 = \frac{4{,}25\, U}{\varkappa \cdot A} \sqrt{P\, U\, B} \sqrt{\eta}\,. \tag{44}$$

In dieser Gleichung hat $\varkappa$ die Bedeutung der Wärmeübergangszahl und A die der wärmeabgebenden Außenfläche des Lagers. Da η eine Funktion der Temperatur ϑ ist, muß zur Lösung der Gleichung (44) das Viskositäts-Temperaturverhalten des verwendeten Schmiermittels bekannt sein.

Beispiel. Als Beispiel aus der Praxis für die Anwendung schmaler Gleitlager sei hier die Kurbelwellenlagerung einer amerikanischen Pipeline-Pumpe erwähnt: Es handelt sich um eine 5-zylindrige Kolbenpumpe Quintuplex VQE 2, 3,5″ × 5″, der amerikanischen Worthington-Gesellschaft. Das als Beispiel gewählte Lager hat einen Durchmesser von $D = 9^1/_2{}'' \mathrel{\hat{=}} 241$ mm, eine Breite $B \mathrel{\hat{=}} 1^9/_{10}{}'' \mathrel{\hat{=}} 48{,}2$ mm und damit ein Breitenverhältnis von $\sigma = 0{,}2$. Die maximale Lagerbelastung ergibt sich bei der Nenndrehzahl $n = 360$ U/min unter Berücksichtigung der Massenkräfte zu $P = 4120$ kg. Bei der Förderung einer Flüssigkeit, die eine maximale Temperatur von 150 °C haben darf, kommt es zu einem Wärmefluß zu den Lagern. Es kann aber angenommen werden, daß die Umlaufschmierung in der Lage ist, die Lagertemperatur auf 60° zu halten. Mit Rücksicht auf die Erwärmung wird ein relativ großes Lagerspiel $\psi = 2 \cdot 10^{-3}$ angenommen. Die Rauhigkeitshöhe wird zu $h_{zul} = 10\,\mu$ geschätzt. Mit diesen Werten ergibt sich nach (42) $\chi_{grenz} = 0{,}96$. Das heißt, bei $\chi = 0{,}96$ geht das Lager in die Mischreibung. Bei einem Breitenverhältnis von $\sigma = 0{,}2$ beträgt die Druckkennzahl nach Abb. 14

$$\left[\frac{p_m H_0^2}{\eta\, U\, D}\right]_{grenz} = \left[\frac{p_m h_{zul}^2}{\eta\, U\, D}\right] = 0{,}006\,.$$

Die Grenztragkraft ergibt sich dann nach (43) zu

$$P_{grenz} = 2120\, \eta\, n\,.$$

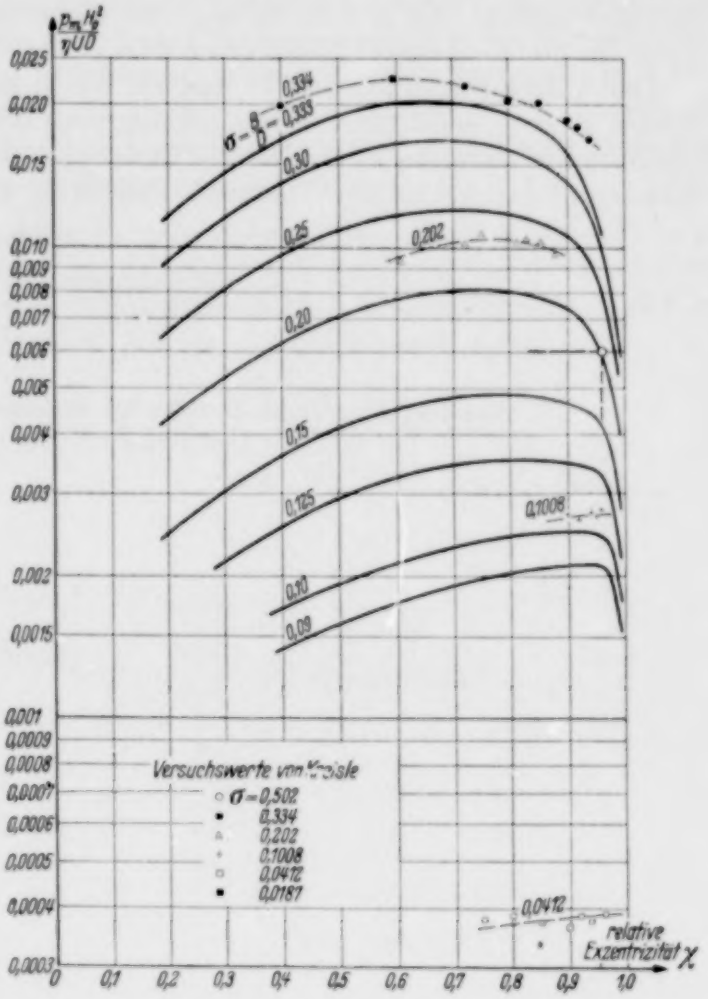


Abb. 14. Auftragung der Druckkennzahl $\left[\frac{p_m H_0^2}{\eta\, U\, D}\right]$ über χ mit dem Breitenverhältnis σ als Parameter.

Mit einem Öl 20° E/50° C, das bei 60 °C eine Zähigkeit von $\eta = 80$ c P hat, ergibt sich die Drehzahl, bei der das Lager in die Mischreibung geht, zu $n = 243$ U/min. Das Lager arbeitet demnach betriebssicher im Zustand der Fließreibung.

Berechnet man in ähnlicher Weise die Tragfähigkeiten schmaler Gleitlager und vergleicht sie mit denen von Wälzlagern gleicher Breite, so stellt man fest, daß von einer allgemeinen Überlegenheit des „Kurzwälzlagers" gegenüber dem Gleitlager nicht gesprochen werden kann. Schmale Gleitlager sind durchaus in der Lage, bei gleicher Lebensdauer gleiche oder sogar höhere Kräfte als das Wälzlager aufzunehmen. Dabei muß allerdings besonders bei höheren Drehzahlen die größere Reibungswärme des Gleitlagers durch geeignete Kühlmaßnahmen abgeführt werden.

7. Zusammenfassung. Die vorliegende Untersuchung hat gezeigt, daß im Falle des unendlich breiten Schmierkeiles Flächenunterteilungen zum Zwecke der Tragkrafterhöhung in der Praxis nur dann Sinn haben, wenn die Keilsteigung ε sehr große Werte annimmt. Im Bereich der Keilsteigung $1 \leqq L\,\varepsilon/H_0 \leqq 10$ würde eine Unterteilung zu einer zum Teil wesentlichen Tragkraftverminderung führen. Da sich in der Praxis Keilsteigungen, die in den Bereich $1 \leqq L\,\varepsilon/H_0 \leqq 10$ fallen,

fast immer herstellen lassen, hat die Untersuchung des Bereiches $L\,\varepsilon/H_0 > 10$ nur theoretischen Wert. Sie zeigt jedoch, daß hier eine Unterteilung sinnvoll sein und zu höheren Tragkräften führen kann. Es lassen sich, wie in Abb. 6 dargestellt, die Bereiche angeben, in denen die jeweilige Teilflächenzahl n die höchste Tragkraft liefert.

Aus der Untersuchung des endlich breiten Gleitschuhes folgt die Erkenntnis, daß die optimale Tragkraft nur dann erreicht ist, sobald ein Breitenverhältnis $B/L = 1$ und eine Keilsteigung $\varphi = 0{,}8$ eingehalten wird. Die größten Tragkräfte bei Schmierkeilen von endlicher Breite werden immer bei einer Unterteilung in quadratische Teilflächen erreicht. Jedoch liefern auch die benachbarten Werte von $B/L = 1$ und $\varphi = 0{,}8$ hohe Tragkräfte.

Der Vergleich des mehrflächigen Halblagers mit dem zylindrischen Halblager bestätigt eindeutig, daß für kleine Lagerbreiten das unterteilte Lager dem zylindrischen Lager hinsichtlich der Tragkraft überlegen ist. In der Praxis dürfte sich jedoch der Einsatz mehrflächiger Lager erst für Breitenverhältnisse $\sigma \leqq 0{,}25$ lohnen. Dabei beträgt die mögliche Tragkraftsteigerung 17%. Sie steigt für ein Breitenverhältnis von $\sigma = 0{,}15$ auf 74% an.

Die Auftragungen in Abb. 13 und 14, die in guter Übereinstimmung mit Versuchswerten von Kreisle stehen, gestatten die Berechnung sehr schmaler Gleitlager. Eine Gegenüberstellung von Gleit- und Wälzlagern zeigt, daß die Gleitlager geeignet sind, an Stellen wirklichen Raummangels Wälzlager hinsichtlich der Tragkraft vollwertig zu ersetzen.

(Eingegangen am 7. August 1959.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Heinz Peeken*, Kiel, Hasseldieksdammer Weg 27.

Aus dem Max-Plank-Institut für Strömungsforschung, Abt. Reibungsforschung
(Leitung Prof. Dr.-Ing. *G. Vogelpohl*).

Analysis of Plane Stress in Cartesian Coordinates and with Varying Thickness

By H. D. Conway

1. Scope of the Investigation. The biharmonic stress-function equation for plane stress in cartesian coordinates x, y is generalized to take account of varying thickness perpendicular to the plane of the stress, which thickness is a function of the coordinate y. For stress functions in the important forms $F(y) \sin \gamma x$ and $F(y) \cos \gamma x$, this equation is found to be particularly tractable if the thickness is proportional to e^{ky}, since it leads to an ordinary, homogeneous, fourth-order differential equation in $F(y)$, the characteristic equation of which is, moreover, easily factored. If $k y$ is everywhere small, a linear variation of thickness can then be approximated to. A numerical example is given for a square-plate problem, the stresses being compared with those from the corresponding constant-thickness solution due to *Girkmann*[1].

2. Analysis. If it is assumed that the thickness, perpendicular to the plane of the stress, is varying but everywhere small compared with the other dimensions of the plate, the usual method of analysis employing stress-functions may be used. We proceed in the usual manner but with this generalization.

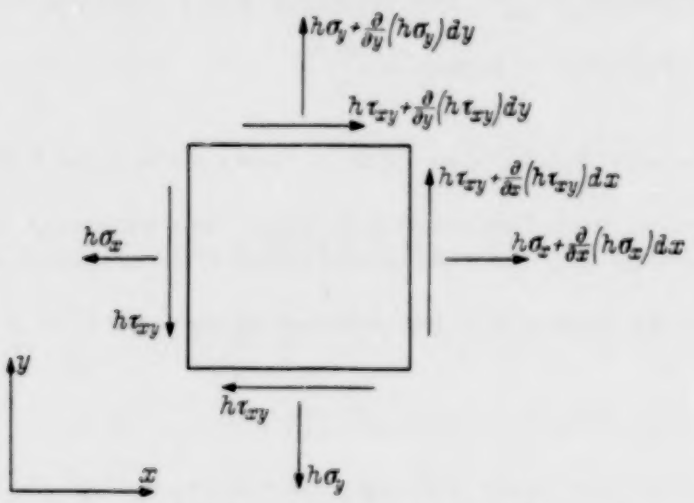


Fig. 1. Forces per unit length on sides of element.

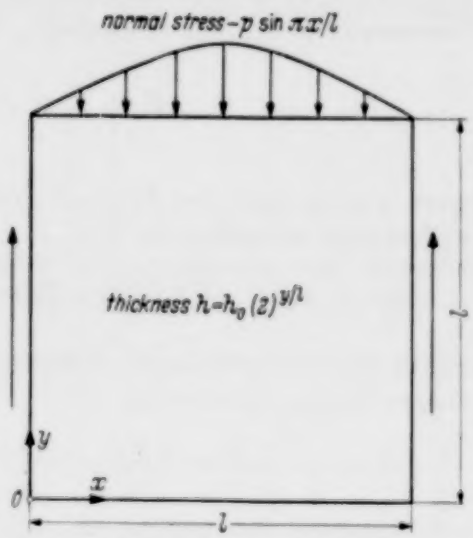


Fig. 2. Loaded Square Plate.

Fig. 1 shows a rectangular element of thickness $h = f(y)$, the equations for horizontal and vertical equilibrium being

$$\frac{\partial}{\partial x}(h\,\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(h\,\tau_{xy}) = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(h\,\sigma_y) + \frac{\partial}{\partial x}(h\,\tau_{xy}) = 0\,. \tag{1}$$

It is seen that these equations are satisfied by a stress-function $\Phi(x, y)$ such that

$$h\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\,, \quad h\,\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\,, \quad h\,\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y}\,. \tag{2}$$

The stress-strain equations are, with the usual notation

$$\left.\begin{aligned} E\frac{\partial u}{\partial x} &= \sigma_x - \nu\,\sigma_y\,, \\ E\frac{\partial v}{\partial y} &= \sigma_y - \nu\,\sigma_x\,, \\ G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) &= \tau_{xy}\,, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

[1] *K. Girkmann*, Flächentragwerke, 4th edition, page 53, Wien 1956.

and, by substituting Equations (2) in (3) and eliminating the displacements, the compatibility equation is

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\nu}{h}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\frac{\nu}{h}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)=-2\,(1+\nu)\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\right). \tag{4}$$

A thickness h is now selected in the form

$$h=h_0\,e^{ky} \tag{5}$$

where h_0 and k are constants, which, after substitution, gives

$$\left.\begin{aligned}&\Delta^4\Phi-2\,k\,\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}+k^2\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\nu\,k^2\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-2\,k\,\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\,\partial y}=0\\ \text{where}\qquad&\Delta^4\Phi=\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+2\,\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}\,.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

The stipulation that h is everywhere small naturally limits the magnitude of $k\,y$. It will be noted that, if k is zero and consequently that the thickness h is constant, Equation (6) becomes the well-known biharmonic equation for the stress-function. If $k\,y$ is everywhere sufficiently small for higher powers to be ignored, the thickness variation is approximately given by the linear equation $h=h_0(1+k\,y)$.

For loadings which are discontinuous, stress-functions in the form of Fourier series or integrals are commonly used, and accordingly we consider stress-functions in the form

$$\Phi=F(y)\sin\gamma\,x\,,\quad F(y)\cos\gamma\,x\ \text{with}\ \gamma=\frac{m\,\pi}{l} \tag{7}$$

where m is an integer and $F(y)$ a function of y only. Substituting (7) in (6) then results in the following differential equation for $F(y)$:

$$F^{\mathrm{IV}}-2\,k\,F^{\mathrm{III}}+(k^2-2\,\gamma^2)\,F^{\mathrm{II}}+2\,k\,\gamma^2\,F^{\mathrm{I}}+(\gamma^4+\nu\,k^2\,\gamma^2)\,F=0 \tag{8}$$

where the superscripts denote differentiation with respect to y. For solutions of the form $F=A\,e^{\lambda y}$, the characteristic equation is

$$\lambda^4-2\,k\,\lambda^3+(k^2-2\,\gamma^2)\,\lambda^2+2\,k\,\gamma^2\,\lambda+(\gamma^4+\nu\,k^2\,\gamma^2)=0\,. \tag{9}$$

Very fortunately, this quartic can be factored without much difficulty. We write, tentatively

$$(\lambda+\alpha+\beta_1)\,(\lambda+\alpha-\beta_1)\,(\lambda+\alpha+\beta_2)\,(\lambda+\alpha-\beta_2)=0 \tag{10}$$

where $\alpha=-k/2$. Multiplication then gives

$$\lambda^4-2\,k\,\lambda^3+\left(\frac{3\,k^2}{2}-\beta_1^2-\beta_2^2\right)\lambda^2+\left(k\,[\beta_1^2+\beta_2^2]-\frac{k^3}{2}\right)\lambda+\left(\frac{k^2}{4}-\beta_1^2\right)\left(\frac{k^2}{4}-\beta_2^2\right)=0\,. \tag{11}$$

Comparing the respective coefficients of λ^2 and λ in Equations (9) and (11) results in the same equation, viz

$$\beta_1^2+\beta_2^2=\frac{k^2}{2}+2\,\gamma^2\,, \tag{12}$$

whereas a comparison of the terms independent of λ yields, with Equation (12)

$$\gamma^4+\nu\,k^2\,\gamma^2=-\frac{k^4}{16}-\frac{k^2\,\gamma^2}{2}+\beta_1^2\,\beta_2^2\,. \tag{13}$$

From (12) and (13) it may be shown that

$$\beta_1^2=\frac{k^2}{4}+\gamma^2+k\,\gamma\sqrt{\nu}\,i\,,\qquad \beta_2^2=\frac{k^2}{4}+\gamma^2-k\,\gamma\sqrt{\nu}\,i \tag{14}$$

where $i = \sqrt{-1}$. Equation (14) with $\alpha = -k/2$ gives the roots of Equation (9). Thus $F(y)$ is known and the stress-function may finally be written in the form

$$\Phi = e^{k\,y/2}\,[e^{-A\,y}\,(C_1 \cos B\,y + C_2 \sin B\,y) + e^{A\,y}\,(C_3 \cos B\,y + C_4 \sin B\,y)]\,\sin\gamma\,x\,,\ \cos\gamma\,x \qquad (15)$$

where C_1, C_2, C_3 and C_4 are constants of integration, and

$$A = \left\{\frac{k^2}{8} + \frac{\gamma^2}{2} + \left[\left(\frac{k^2}{8} + \frac{\gamma^2}{2}\right)^2 + \frac{k^2\,\gamma^2\,\nu}{4}\right]^{1/2}\right\}^{1/2}, \quad B = \left\{-\frac{k^2}{8} - \frac{\gamma^2}{2} + \left[\left(\frac{k^2}{8} + \frac{\gamma^2}{2}\right)^2 + \frac{k^2\,\gamma^2\,\nu}{4}\right]^{1/2}\right\}^{1/2}. \qquad (16)$$

If ν is zero, Equation (9) has multiple roots, giving

$$\Phi = e^{k\,y/2}\left[C_1\,e^{-\left(\frac{k^2}{4} + \gamma^2\right)^{1/2} y} + C_2\,y\,e^{-\left(\frac{k^2}{4} + \gamma^2\right)^{1/2} y} + C_3\,e^{\left(\frac{k^2}{4} + \gamma^2\right)^{1/2} y} + C_4\,y\,e^{\left(\frac{k^2}{4} + \gamma^2\right)^{1/2} y}\right] \sin\gamma\,x, \cos\gamma\,x\,. \qquad (17)$$

3. Example. As an example, the numerical solution of the problem shown in Fig. 2 of a square plate loaded on its top face by a normal compressive force distributed so as to give a stress σ_y there of $-p \sin \pi\,x/l$, and supported by shearing forces on its vertical faces. The thickness varies from h_0 at the bottom to $2\,h_0$ at the top, whence the law of thickness variation is $h = h_0\,(2)^{y/l}$. The constant-thickness version of this problem has been analyzed by *Girkmann*.

The appropriate stress-function is given by Equation (15) with $\gamma = \pi/l$, the boundary conditions necessary for the determination of C_1, C_2, C_3 and C_4 being

$$\left.\begin{aligned} y = 0\text{:}\ \ & \sigma_y = \tau_{xy} = 0\,, \\ y = l\text{:}\ \ & \sigma_y = -p \sin\frac{\pi\,x}{l}\,,\ \tau_{xy} = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

The boundary conditions of zero normal stress on $x = 0$ and $x = l$ are automatically satisfied by the factor $\sin \pi\,x/l$ in the stress-function. The stresses from Equations (2) and (15) are then

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x = {} & \frac{e^{-k\,y/2}}{h_0\,l^2}\left\{e^{-A\,y}\left(\left[\left(\frac{k\,l}{2} - A\,l\right)^2 - B^2\,l^2\right][C_1 \cos B\,y + C_2 \sin B\,y]\right.\right. \\ & \left. - 2\,B\,l\left[\frac{k\,l}{2} - A\,l\right][C_1 \sin B\,y - C_2 \cos B\,y]\right) + e^{A\,y}\left(\left[\left(\frac{k\,l}{2} + A\,l\right)^2 - B^2\,l^2\right][C_3 \cos B\,y \right. \\ & \left.\left. + C_4 \sin B\,y] - 2\,B\,l\left[\frac{k\,l}{2} + A\,l\right][C_3 \sin B\,y - C_4 \cos B\,y]\right)\right\} \sin\frac{\pi\,x}{l}\,, \\ \sigma_y = {} & \frac{-\pi^2\,e^{-k\,y/2}}{h_0\,l^2}[e^{-A\,y}\,(C_1 \cos B\,y + C_2 \sin B\,y) + e^{A\,y}\,(C_3 \cos B\,y + C_4 \sin B\,y)] \sin\frac{\pi\,x}{l}\,, \\ \tau_{xy} = {} & \frac{-\pi\,e^{-k\,y/2}}{h_0\,l^2}\{e^{-A\,y}\,[B\,l(-C_1 \sin B\,y + C_2 \cos B\,y) + (\beta\,l - A\,l)\,(C_1 \cos B\,y + C_2 \sin B\,y)] \\ & + e^{A\,y}\,[B\,l(-C_3 \sin B\,y + C_4 \cos B\,y) + (\beta\,l + A\,l)\,(C_3 \cos B\,y + C_4 \sin B\,y)]\} \cos\frac{\pi\,x}{l}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Assuming $\nu = 0{,}25$ and $k\,l = \ln 2 = 0{,}69315$ for the required thickness variation, A and B are obtained from Equations (16) and the constants of integration obtained by solving simultaneously the four equations obtained from the boundary conditions in Equation (18). Hence

$$A\,l = 3.16533,\ B\,l = 0.17199\,,$$

$$C_1 = -C_3 = -0.0291808\,p h_0\,l^2\,,$$

$$C_2 = -0.9433000\,p h_0\,l^2\,,$$

$$C_4 = -0.1307951\,p h_0\,l^2\,.$$

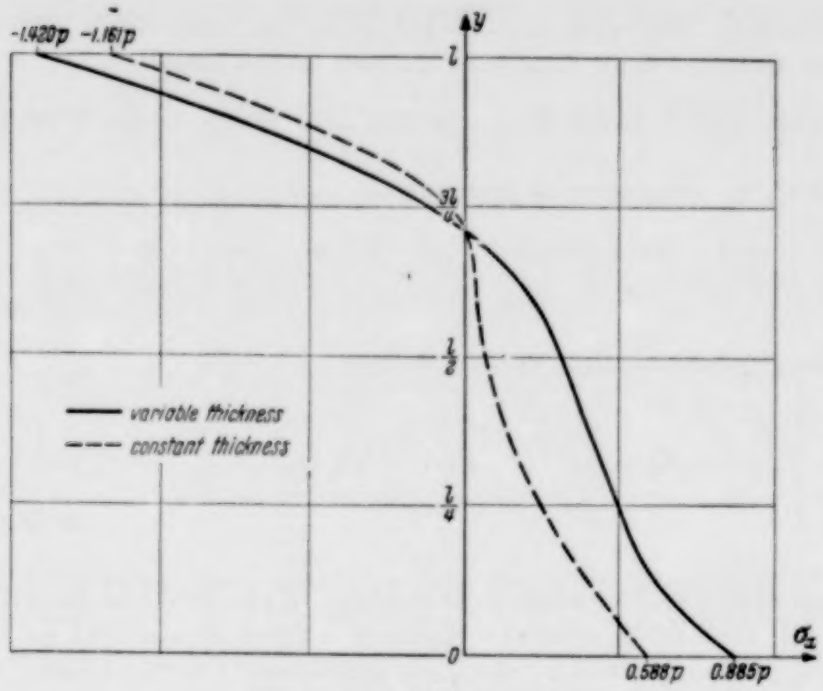


Fig. 3. Graphs of $\sigma_{x_{x=l/2}}$.

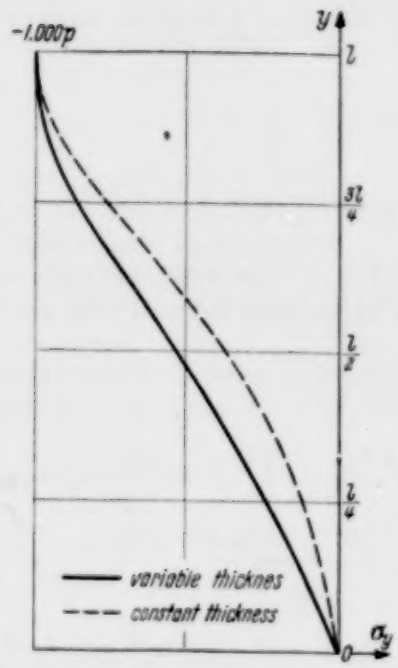


Fig. 4. Graphs of $\sigma_{y_{x=l/2}}$.

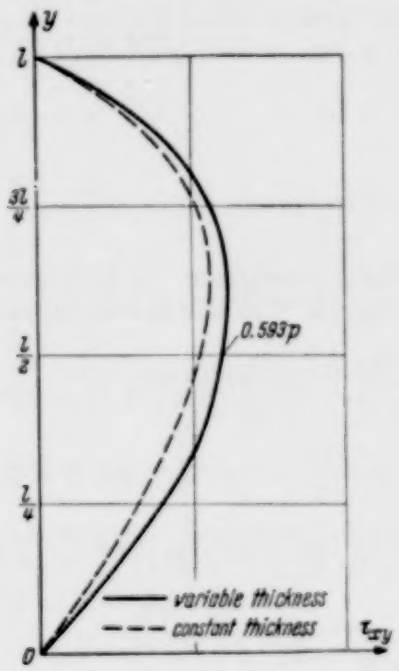


Fig. 5. Graphs of $\tau_{xy_{x=0,l}}$.

Numerical values of $\sigma_{x_{x=l/2}}$, $\sigma_{y_{y=l/2}}$ and $\tau_{xy_{x=0,l}}$ are plotted in Figs. 3, 4 and 5, respectively, where they are compared with the corresponding values for a square plate of constant thickness obtained by *Girkmann*. The values of the stresses for the latter case are, of course, independent of the value of ν.

(Eingegangen am 13. August 1959.)

Anschrift des Verfassers: Prof. *H. D. Conway*, Thurston Hall, Cornell University, Ithaca, New York, USA

Die Singularitäten der frei drehbar gelagerten orthotropen Halbplattenstreifen

Von G. Nitsiotas

1. Einleitung. Die Singularitäten der unendlich ausgedehnten Voll- und Halbplatten wurden eingehend von *Stein*[1] behandelt. In der vorliegenden Arbeit sollen unter Anwendung des von *Pucher*[2] entwickelten Verfahrens für die isotropen Plattenstreifen geschlossene Formeln für die Singularitäten der Krümmungen und der Verwindung von frei drehbar orthotropen Voll- und Halbstreifen abgeleitet werden. Den Untersuchungen wird die *Hubers*che Differentialgleichung

$$K_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + K_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \tag{1}$$

zugrunde gelegt. Hierin sind K_x, K_y die Biegesteifigkeiten der Platte in der x- und y-Richtung. Bezeichnet man mit μ_x, μ_y die bezogenen *Poisson*schen Zahlen in denselben Richtungen, so ist die Drillsteifigkeit des vorliegenden Systems

$$2\,C = \left(1 - \sqrt{\mu_x\,\mu_y}\right)\sqrt{K_x\,K_y}\,;$$

somit ist

$$2\,H = (K_x\,\mu_y + K_y\,\mu_x) + 4\,C\,.$$

Das Belastungsglied $p(x, y)$ wurde in (1) gleich Null gesetzt, da wir uns auf die Untersuchung von Einzelangriffen beschränken.

Die allgemeinen Gleichungen für die Biegemomente und das Drillmoment lauten

$$m_x = -K_x\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2} + \mu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \qquad m_y = -K_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \qquad m_{xy} = -2\,C\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,.$$

Andererseits gelten für die bezogenen Querkräfte die Beziehungen

$$q_x = -K_x\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\mu_y + \frac{2\,C}{K_x}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right], \qquad q_y = -K_y\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left(\mu_x + \frac{2\,C}{K_y}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\right].$$

Mit Rücksicht auf die Aufstellung der Randbedingungen der Halbstreifen mit freiem Querrand schreiben wir die für die statisch gleichwertigen Ersatzquerkräfte geltenden Formeln auf:

$$\bar{q}_x = -K_x\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\mu_y + \frac{4\,C}{K_x}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right], \qquad \bar{q}_y = -K_y\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left(\mu_x + \frac{4\,C}{K}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right].$$

Zur Integration der homogenen Differentialgleichung (1) erweist sich als zweckmäßig die Benutzung des *Bernoulli*schen Ansatzes[3]

$$w = A\,e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda y}\sin\frac{n\pi}{a}\,x\,, \tag{2}$$

welcher die Randbedingungen

$$w = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad (m_x = 0)$$

entlang der frei drehbaren Ränder

$$x = 0 \qquad \text{und} \qquad x = a$$

des unendlichen Plattenstreifens von Haus aus erfüllt.

---

[1] *P. Stein*, Dissertation TU Berlin, Stahlbau-Verlag 1959.
[2] *A. Pucher*, Ing.-Arch. 14 (1943), S. 259.
[3] Grundsätzliches über orthotrope Platten bei *K. Girkmann*, Flächentragwerke, S. 300. Wien 1956.

Nach Einsetzen des Ausdruckes (2) in (1) ergibt sich zur Bestimmung der freien, noch wählbaren Konstante λ die charakteristische Gleichung

$$K_x - 2H\lambda^2 + K_y\lambda^4 = 0 .$$

Führt man nun in dieser den Kennwert

$$\varkappa = \sqrt{\frac{H}{K_x K_y}}$$

und das Biegesteifigkeitsverhältnis

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K_x}{K_y}}$$

ein, so bekommt man folgende vier Wurzeln:

$$\lambda_{1,4} = \pm\beta\sqrt{\varkappa + \sqrt{\varkappa^2 - 1}} = \pm\beta\left(\sqrt{\frac{\varkappa+1}{2}} \pm \sqrt{\frac{\varkappa-1}{2}}\right). \tag{3}$$

Im Hinblick auf diese Werte, haben wir die nachstehenden drei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall: Überdrillsteife Platte $\infty > \varkappa > 1$. Alle vier Wurzeln sind reell. Davon scheiden die negativen $\lambda_{3,4}$ aus, da w für $y = \infty$ nicht unendlich werden kann. Somit verbleiben die positiven Wurzeln λ_1, λ_2, welche durch die Formeln

$$\lambda_1 = \beta\left(\sqrt{\frac{\varkappa+1}{2}} + \sqrt{\frac{\varkappa-1}{2}}\right), \qquad \lambda_2 = \beta\left(\sqrt{\frac{\varkappa+1}{3}} - \sqrt{\frac{\varkappa-1}{2}}\right)$$

gegeben sind.

Zweiter Fall: Isodrillsteife Platte $\varkappa = 1$. Für diesen Wert liefert (3) zwei Doppelwurzeln $\pm\beta$. Im allgemeinen ist dieser Fall gleichwertig mit dem Fall der isotropen Platte. In der Tat, durch die Koordinatentransformation

$$\bar{x} = x \qquad \text{und} \qquad \bar{y} = \beta y$$

verwandelt sich, unter Beibehaltung der Randbedingungen, die Differentialgleichung (1) in die biharmonische Gleichung

$$\underset{\bar{x},\bar{y}}{\Delta\Delta}\, w = 0 .$$

Dritter Fall: Unterdrillsteife Platte $1 > \varkappa > 0$. In diesem Falle sind jeweils zwei Wurzeln konjugiert komplex, davon kommen nur die mit positivem reellen Teil in Frage:

$$\lambda_1 = \varphi + i\psi , \qquad \lambda_2 = \varphi - i\psi ,$$

wobei

$$\varphi = \beta\sqrt{\frac{1+\varkappa}{2}} , \qquad \psi = \beta\sqrt{\frac{1-\varkappa}{2}}$$

ist.

2. Die Singularitäten des unendlichen Plattenstreifens. Betrachten wir nun den frei aufliegenden Plattenstreifen mit der Einzellast $P = 1$ im Aufpunkt $A(u, v)$. Die Belastung $p(x)$ entlang der Geraden $y = v$ stellen wir mittels einer *Fourier*schen Reihe als ungerade Funktion von x mit der Periode $2a$ dar. Die Entwicklung lautet

$$p(x) = \frac{2}{a}\sum \sin\frac{n\pi}{a}u \sin\frac{n\pi}{a}x .$$

Für die Biegefläche wählen wir den Ansatz

$$w = S^{IV} = \sum\left[\frac{A_1}{\lambda_1}e^{\mp\frac{n\pi}{a}\lambda_1(y-v)} - \frac{A_2}{\lambda_2}e^{\mp\frac{n\pi}{a}\lambda_2(y-v)}\right]\sin\frac{n\pi}{a}u\sin\frac{n\pi}{a}x , \tag{4}$$

welcher die Differentialgleichung (1) und die Randbedingungen entlang der Geraden $x = 0$, $x = a$ bereits erfüllt. Das negative Vorzeichen im Exponent gilt für den Bereich $y > v$. Der Index IV bezeichnet den Fall des frei aufliegenden Plattenstreifens.

Der Ansatz (4) stellt die gesuchte Singularität dar, wenn entlang der Bereichgrenze $y = v$ die Randbedingungen

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=v} = 0 \qquad \text{und} \qquad (q_y)_{y=v} = -\frac{1}{2}p(x)$$

erfüllt sind. Berücksichtigt man die Symmetrie um die Gerade $y = v$, so bekommt man

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\right)_{y=v} = 0\,.$$

Mithin transformiert sich die zweite Randbedingung zu

$$-K_y\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)_{y=v} = -\frac{1}{2}\,p(x)\,.$$

Hiermit ergeben sich zur Bestimmung der zwei Unbekannten A_1, A_2 die linearen Gleichungen

$$A_1 - A_2 = 0\,,$$

$$-K_y\left(\frac{n\pi}{a}\right)^3(-\lambda_1^2 A_1 + \lambda_2^2 A_2) = -\frac{1}{a}\,.$$

Berücksichtigt man nun die Gleichung

$$\lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 2\beta^2\sqrt{\varkappa^2-1} = 2\sqrt{\frac{K_x}{K_y}}\sqrt{\varkappa^2-1}\,,$$

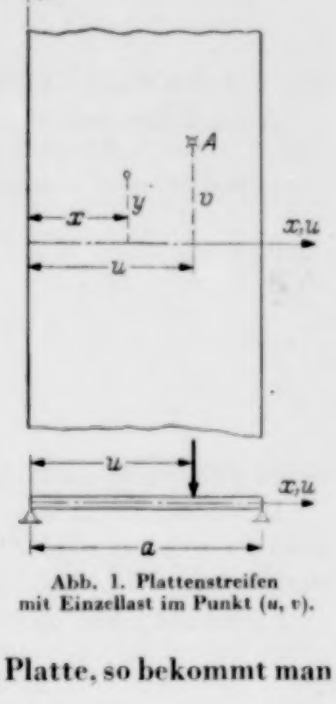


Abb. 1. Plattenstreifen mit Einzellast im Punkt (u, v).

und setzt man $K = \sqrt{K_x K_y}$ für die mittlere Biegesteifigkeit der orthotropen Platte, so bekommt man

$$A_1 = A_2 = \frac{-1}{2\,a\,K\sqrt{\varkappa^2-1}}\,\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^3}\,, \qquad \left(K = \sqrt{K_x K_y}\right).$$

Diese Werte in (4) eingesetzt liefern die Singularität der Durchbiegung des Plattenstreifens

$$S^{IV} = \frac{1}{2\,a\,K\sqrt{\varkappa^2-1}}\sum\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^3}\left[-\frac{1}{\lambda_1}\,e^{\mp\frac{n\pi}{a}\lambda_1(y-v)} + \frac{1}{\lambda_2}\,e^{\mp\frac{n\pi}{a}\lambda_2(y-v)}\right]\sin\frac{n\pi}{a}\,u\sin\frac{n\pi}{a}\,x\,. \tag{5}$$

Durch zweimalige Differentiation nach den Koordinaten u bzw. v des Aufpunktes A ergeben sich die den Krümmungen und der Verwindung zugeordneten modifizierten Singularitäten. Es wird

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 S^{IV}}{\partial u^2} &= \frac{1}{2\pi K\sqrt{\varkappa^2-1}}\sum\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\lambda_1}\,e^{\mp\frac{n\pi}{a}\lambda_1(y-v)} - \frac{1}{\lambda_2}\,e^{\mp\frac{n\pi}{a}\lambda_2(y-v)}\right]\sin\frac{n\pi}{a}\,u\sin\frac{n\pi}{a}\,x\,,\\
\frac{\partial^2 S^{IV}}{\partial v^2} &= \frac{1}{2\pi K\sqrt{\varkappa^2-1}}\sum\frac{1}{n}\left[-\lambda_1\,e^{\mp\frac{n\pi}{a}\lambda_1(y-v)} + \lambda_2\,e^{\mp\frac{n\pi}{a}\lambda_2(y-v)}\right]\sin\frac{n\pi}{a}\,u\sin\frac{n\pi}{a}\,x\,,\\
\frac{\partial^2 S^{IV}}{\partial u\,\partial v} &= \frac{\pm 1}{2\pi K\sqrt{\varkappa^2-1}}\sum\frac{1}{n}\left[e^{\mp\frac{n\pi}{a}\lambda_1(y-v)} - e^{\mp\frac{n\pi}{a}\lambda_2(y-v)}\right]\cos\frac{n\pi}{a}\,u\sin\frac{n\pi}{a}\,x\,.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Diese Ausdrücke können auch in geschlossener Form dargestellt werden, wenn man die Identitäten

$$\left.\begin{aligned}
I(\lambda, y-v, x-u) &= 4\sum\frac{1}{n}\,e^{\mp\frac{n\pi}{a}\lambda(y-v)}\sin\frac{n\pi}{a}\,u\sin\frac{n\pi}{a}\,x\\
&= \ln\frac{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{a}\lambda(y-v) - \cos\frac{\pi}{a}(x+u)}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{a}\lambda(y-v) - \cos\frac{\pi}{a}(x-u)}\,,\\
G(\lambda, y-v, x-u) &= 2\sum\frac{1}{n}\,e^{\mp\frac{n\pi}{a}\lambda(y-v)}\cos\frac{n\pi}{a}\,u\sin\frac{n\pi}{a}\,x\\
&= \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\frac{\pi}{a}(x+u)}{e^{\pm\frac{\pi}{a}\lambda(y-v)} - \cos\frac{\pi}{a}(x+a)} + \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\frac{\pi}{a}(x-u)}{e^{\pm\frac{\pi}{a}\lambda(y-v)} - \cos\frac{\pi}{a}(x-u)}
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

in Betracht zieht. Diese Formeln gelten sowohl für reelle, als auch für komplexe Werte von λ, wenn

$$\left| e^{\mp \frac{n\pi}{a}\lambda(y-v)} \right| < 1$$

ist. Da der reelle Teil der Wurzeln λ immer positiv ist, wird obige Konvergenzbedingung erfüllt.

Nach Einsetzen der Werte (7) in (6) erhält man die geschlossenen Formeln

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 S^{IV}}{\partial u^2} &= \frac{1}{8\pi K\sqrt{\varkappa^2-1}}\left(\frac{I_1}{\lambda_1}-\frac{I_2}{\lambda_2}\right), \\ \frac{\partial^2 S^{IV}}{\partial v^2} &= \frac{1}{8\pi K\sqrt{\varkappa^2-1}}\left(-\lambda_1 I_1+\lambda_2 I_2\right), \\ \frac{\partial^2 S^{IV}}{\partial u\,\partial v} &= \frac{\pm 2}{8\pi K\sqrt{\varkappa^2-1}}\left(-G_1+G_2\right), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

wobei $I_1(G_1)$ und $I_2(G_2)$ die Werte der Ausdrücke $I(G)$ für $\lambda=\lambda_1$ und $\lambda=\lambda_2$ sind.

In dieser Form können die Singularitäten nur für die Berechnungen im Bereich $\infty > \varkappa > 1$ benützt werden. Im Falle von unterdrillsteifen Platten, (komplexe Wurzeln λ) erweist sich als zweckmäßig die Umbildung der Formeln (8).

Führt man die Abkürzungen

$$A = \mathfrak{Cof}\frac{\pi}{a}\varphi(y-v)\cos\frac{\pi}{a}\psi(y-v) - \cos\frac{\pi}{a}(x+u),$$

$$B = \mathfrak{Cof}\frac{\pi}{a}\varphi(y-v)\cos\frac{\pi}{a}\psi(y-v) - \cos\frac{\pi}{a}(x-u),$$

$$C = \mathfrak{Sin}\frac{\pi}{a}\varphi(y-v)\sin\frac{\pi}{a}\psi(y-v)$$

ein, so bekommt man

$$\frac{\partial^2 S^{IV}}{\partial u^2} = -\frac{1}{8\pi K}\frac{\sqrt{2}}{\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varkappa}}\ln\sqrt{\frac{A^2+C^2}{B^2+C^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa}}\operatorname{arc\,tg}\frac{(A-B)C}{AB+C^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 S^{IV}}{\partial v^2} = -\frac{\sqrt{2}}{8\pi K}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varkappa}}\ln\sqrt{\frac{A^2+C^2}{B^2-C^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa}}\operatorname{arc\,tg}\frac{(A-B)C}{AB+C^2}\right).$$

Die Singularität der Verwindung läßt sich auch schreiben in der Form

$$\frac{\partial^2 S^{IV}}{\partial u\,\partial v} = \frac{-1}{8\pi K\sqrt{1-\varkappa^2}}\left\{\ln\frac{\cos\frac{\pi}{a}[\psi(y-v)-(x+u)]-\mathfrak{Cof}\frac{\pi}{a}\varphi(y-v)}{\cos\frac{\pi}{a}[\psi(y-v)+(x+u)]-\mathfrak{Cof}\frac{\pi}{a}\varphi(y-v)}\right.$$

$$\left.+\ln\frac{\cos\frac{\pi}{a}[\psi(y-v)-(x-u)]-\mathfrak{Cof}\frac{\pi}{a}\varphi(y-v)}{\cos\frac{\pi}{a}[\psi(y-v)+(x-u)]-\mathfrak{Cof}\frac{\pi}{a}\varphi(y-v)}\right\}.$$

Um die Singularität für $\varkappa=1$ bzw. $\lambda_1=\lambda_2=\beta$ zu erhalten, muß der Grenzübergang $\lim_{\varkappa\to 1}$ gebildet werden. Allerdings auch für Werte von $\varkappa$ in der Nähe der Einheit ($\varkappa = 1 \pm \Delta\varkappa$) erweisen sich die Formeln (8) ungeeignet zur Berechnung, da das Resultat sich als Differenz zweier fast gleicher Zahlen ergibt. Aus diesem Grunde erscheint es zweckmäßig, die Ausdrücke (8) in Reihen nach den Potenzen von $\Delta\lambda=\lambda_1-\lambda_2$ zu entwickeln. Wir schreiben zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1=\beta+\Delta\lambda_1, \qquad \lambda_2=\beta-\Delta\lambda_2, \\ &\Delta\lambda=\lambda_1-\lambda_2=\Delta\lambda_2+\Delta\lambda_2=2\beta\sqrt{\frac{\varkappa-1}{2}}, \\ &\Delta\lambda_1-\Delta\lambda_2=\lambda_1+\lambda_2-2\beta=2\beta\left(\sqrt{\frac{\varkappa+1}{2}}-1\right) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

und entwickeln I_1/λ_1 in Reihen. Es wird

$$\frac{I_1}{\lambda_1} = \frac{I(\beta + \Delta\lambda_1)}{\beta + \Delta\lambda_1} = \frac{(\beta - \Delta\lambda_1)(\beta^2 + \Delta\lambda_1^2)}{\beta^4}\left[I_\beta + \Delta\lambda_1 I'_\beta + \frac{1}{2}\Delta\lambda_1^2 I''_\beta + \ldots\right]$$
$$= \frac{1}{\beta}\left[I_\beta + \Delta\lambda_1\left(I'_\beta - \frac{I_\beta}{\beta}\right) + \frac{\Delta\lambda_1^2}{\beta}\left(-I'_\beta + \frac{I_\beta}{\beta} + \frac{\beta}{2} I''_\beta\right)\right],$$

wobei I_β, I'_β, I''_β die Werte des Ausdruckes für $\lambda = \beta$ und seine Ableitungen nach β sind. Ganz ähnlich läßt sich der Bruch I_2/λ_2 entwickeln. Daraus und unter Berücksichtigung von (9) folgt:

$$\frac{\partial^2 S^{IV}}{\partial u^2} \sim \frac{1}{8\pi K}\left[\left(I'_\beta - \frac{I_\beta}{\beta}\right)\left(3\sqrt{\frac{2}{\varkappa+1}} - 2\right) + \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\varkappa+1}}\right)\beta\, I''_\beta\right]. \tag{10a}$$

Für $\varkappa = 1$ ($\lambda = \beta$) bekommt man die Singularität der isodrillsteifen Platte zu

$$\frac{\partial^2 S^{IV}_\beta}{\partial u^2} = \frac{1}{8\pi K}\left(I'_\beta - \frac{I_\beta}{\beta}\right). \tag{10b}$$

Diese Formel stimmt für $\beta = 1$ mit der von *Pucher*[1] für die isotrope Platte abgeleitete Formel überein. Durch Einsetzen des Wertes (10b) in (10a) ergibt sich

$$\frac{\partial^2 S^{IV}}{\partial u^2} \sim \left(3\sqrt{\frac{2}{\varkappa+1}} - 2\right)\frac{\partial^2 S^{IV}_\beta}{\partial u^2} + \frac{\beta\, I''_\beta}{8\pi K}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{\varkappa+1}}\right). \tag{11a}$$

In gleicher Weise erhält man für die zwei anderen Singularitäten folgende entwickelten Ausdrücke:

$$\frac{\partial^2 S^{IV}}{\partial v^2} \sim \beta^2\sqrt{\frac{2}{\varkappa+1}}\,\frac{\partial^2 S^{IV}_\beta}{\partial v^2} - \frac{\beta^2(2\, I'_\beta + \beta\, I''_\beta)}{8\pi K}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{1+\varkappa}}\right), \tag{11b}$$

$$\frac{\partial^2 S^{IV}}{\partial u\,\partial v} \sim 2\beta\sqrt{\frac{2}{\varkappa+1}}\,\frac{\partial^2 S^{IV}_\beta}{\partial u\,\partial v} - 2\beta^2 G''_\beta\left(1 - \sqrt{\frac{2}{1+\varkappa}}\right), \tag{11c}$$

wobei

$$\frac{\partial^2 S^{IV}_\beta}{\partial v^2} = -\frac{1}{8\pi K}\left(I'_\beta + \frac{I_\beta}{\beta}\right), \qquad \frac{\partial^2 S^{IV}_\beta}{\partial u\,\partial v} = -\frac{1}{8\pi K} G'_\beta \tag{12}$$

ist. Dies sind Singularitäten der isodrillsteifen Platte.

Die Ausdrücke (8) stellen modifizierte Singularität dar, welche neben den klassischen Singularitäten S der unendlich ausgedehnten Platte eine reguläre Funktion erhalten, deren Größe im Aufpunkt bestimmt werden soll. Im allgemeinen gilt

$$\mathrm{Reg}\, D[S^{IV}] = D[S^{IV}] - D[S]. \tag{13}$$

$D[\ ]$ bedeutet eine Differentialoperation nach den Koordinaten des Aufpunktes $A(u, v)$.

Wir gehen von der klassischen Singularität von *Stein*[2] aus, da bereits für diese die Berechnung des Restvolumens des in den Höhenlinienplänen nicht mehr darstellbaren Teiles des unendlich langen Schlauches im Aufpunkt durchgeführt wurde.

Setzt man in der Formel (13) einerseits die Werte (8) der Reihe nach, andererseits die von *Stein* ermittelten klassischen Singularitäten ein und entwickelt man die trigonometrischen und Hyperbelfunktionen in Reihen nach den Potenzen von $y - v$ und $x - u$, so lassen sich bestimmte Grenzwerte leicht nachweisen. Demnach wird im Aufpunkt

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Reg}\left(\frac{\partial^2 S^{IV}}{\partial u^2}\right) &= -\frac{1}{8\pi K}\left[\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{2}{\varkappa+1}}\ln\frac{2}{\pi^2}\left(1 - \cos\frac{2\pi u}{a}\right)\right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{2}{\varkappa+1}}\left(3 + \ln\frac{a^2}{\sqrt{K_x}}\right) + \sqrt{\frac{2}{\varkappa-1}}\ln\left(\varkappa + \sqrt{\varkappa^2-1}\right)\right],\\
\mathrm{Reg}\left(\frac{\partial^2 S^{IV}}{\partial v^2}\right) &= -\frac{1}{8\pi K}\left[\beta\sqrt{\frac{2}{\varkappa+1}}\ln\frac{2}{\pi^2}\left(1 - \cos\frac{2\pi u}{a}\right) + \beta\sqrt{\frac{2}{\varkappa+1}}\left(3 + \ln\frac{a^2}{\sqrt{K_x}}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Da die Singularität der Verwindung im gesamten Gebiet endlich bleibt, kann sie durch die Höhenlinien vollständig dargestellt und ausgewertet werden.

---

[1] Siehe Fußnote 2 von Seite 223.
[2] Siehe Fußnote 1 von Seite 223.

Aus der Singularität des Plattenstreifens können auch die Singularitäten der unendlichen Platte abgeleitet werden. Es genügt in (8) die trigonometrischen und Hyperbelfunktionen in Reihen nach den Potenzen von $1/a$ zu entwickeln und den Grenzübergang für $a \to \infty$ zu bilden. Hiermit ergeben sich bis auf eine belanglose Konstante die von *Stein* aufgestellten klassischen Singularitäten.

3. Halbstreifen mit frei drehbarem Querrand. Der Spannungszustand des Halbstreifens ist derselbe wie für den Bereich $y \geqq 0$ des vollen Streifens, der in Punkte $(u, +v)$ die Last $+1$ und im Punkte $(u, -v)$ die Last -1 trägt. Wegen der Antimetrie verschwinden entlang der x-Achse die Durchbiegung w und die Krümmung $\partial^2 w/\partial y^2$. Nach dem Überlagerungsgesetz bekommt man mit Hilfe von (8) folgende Singularitäten:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 S^{V}}{\partial u^2} &= \frac{1}{8\pi K\sqrt{\varkappa^2-1}}\left\{\frac{1}{\lambda_1}\left[I_1(y-v)-I_1(y+v)\right]-\frac{1}{\lambda_2}\left[I_2(y-v)-I_2(y+v)\right]\right\},\\
\frac{\partial^2 S^{V}}{\partial v^2} &= \frac{1}{8\pi K\sqrt{\varkappa^2-1}}\left\{-\lambda_1\left[I_1(y-v)-I_1(y+v)\right]+\lambda_2\left[I_2(y-v)-I_2(y+v)\right]\right\},\\
\frac{\partial^2 S^{V}}{\partial u\,\partial v} &= \frac{2}{8\pi K\sqrt{\varkappa^2-1}}\left\{-\left[G_1(y-v)-G_1(y+v)\right]+\left[G_2(y-v)-G_2(y+v)\right]\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Der Index V bezeichnet den Fall des frei drehbaren Querrandes eines Halbstreifens. Für den Fall komplexer Wurzeln λ lassen sich obige Ausdrücke entsprechend umbilden. Andererseits gelten im Falle der quasi-isodrillsteifen Platte ($\varkappa \simeq 1$) ähnliche Gleichungen wie (14). Diese ergeben sich, wenn in (11) der Index IV durch den V ersetzt wird und im Restglied $I''_\beta(y-v) - I''_\beta(y+v)$ statt I''_β eingesetzt wird. Die Singularität $\partial^2 S^{V}_\beta/\partial u^2$ stimmt für $\beta = 1$ mit der Singularität der isotropen Platte überein.

Wie beim vollen Streifen, können auch hier die regulären Teile abgeschieden werden, welche bis auf das Glied $-\frac{1}{8\pi K}\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{2}{\varkappa+1}}\,\Delta$ und $-\frac{1}{8\pi K}\beta\sqrt{\frac{2}{\varkappa+1}}\,\Delta$ mit den Ausdrücken (14) übereinstimmen. Es ist

$$\Delta = \ln\frac{\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi v}{a}-\cos\frac{2\pi u}{a}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi v}{a}-1}. \tag{16}$$

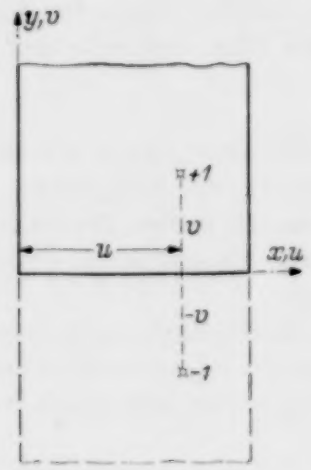


Abb. 2. Halbstreifen mit frei drehbarem Querrand.

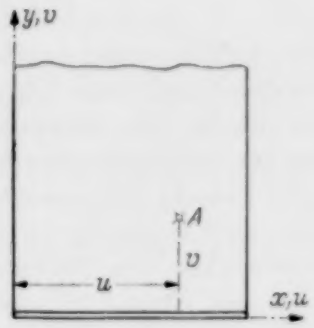


Abb. 3. Halbstreifen mit eingespanntem Querrand.

4. Halbstreifen mit eingespanntem Querrand. Die Singularität S^{VI} der Durchbiegung setzt sich aus der Singularität S^{IV} des vollen Streifens und einem regulären Integral $\bar{w}$ der Differentialgleichung (1) zusammen:

$$S^{VI} = S^{IV} + \bar{w}. \tag{17}$$

Da S^{IV} bereits die Randbedingungen entlang der Geraden $x = 0$ und $x = a$ erfüllt, können wir den Ansatz

$$\bar{w} = \frac{1}{2aK\sqrt{\varkappa^2-1}}\sum\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^3}\left[-\frac{A_1}{\lambda_1}e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_1 y}+\frac{A_2}{\lambda_2}e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_1 y}\right]\sin\frac{n\pi}{a}u\sin\frac{n\pi}{a}x \tag{18}$$

wählen. Längs des eingespannten Randes $y = 0$ verschwinden die Durchbiegungen und die Neigungen:

$$(\bar{w} + S^{IV})_{y=0} = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial S^{IV}}{\partial y}\right)_{y=0} = 0\,.$$

Setzt man nun in diesen die Werte (5) und (18) ein, so bekommt man zur Bestimmung der Unbekannten A_1, A_2 die Gleichungen

$$-\frac{A_1}{\lambda_1} + \frac{A_2}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1} e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_1 v} + \frac{1}{\lambda_2} e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_2 v} = 0\,,$$

$$A_1 - A_2 - e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_1 v} + e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_2 v} = 0\,.$$

Hiermit ergibt sich

$$A_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_1 v} - \frac{2\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_2 v}\,,$$

$$A_2 = \frac{2\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_1 v} - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_2 v}\,.$$

Der Regularteil $\bar{w}$ wird demnach

$$\bar{w} = \frac{1}{2aK\sqrt{\varkappa^2 - 1}} \sum \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^3} \left\{ -\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[\frac{1}{\lambda_1} e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_1 (y+v)} + \frac{1}{\lambda_2} e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_2 (y+v)}\right] \right.$$
$$\left. + \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[e^{-\frac{n\pi}{a}(\lambda_1 y + \lambda_2 v)} + e^{-\frac{n\pi}{a}(\lambda_2 y + \lambda_1 v)}\right]\right\} \sin\frac{n\pi}{a} u \sin\frac{n\pi}{a} x\,.$$

Die höheren Singularitäten folgen durch Einsetzen dieses Ausdruckes in (17) und Differentiation nach den Koordinaten des Aufpunktes. Unter Beachtung von (7) können diese in geschlossener Form angeschrieben werden, indem man die Summen durch die identischen geschlossenen Ausdrücke ersetzt. Es wird somit

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 S^{VI}}{\partial u^2} &= \frac{1}{8\pi K\sqrt{\varkappa^2 - 1}} \left\{\left[\frac{I_1(y-v)}{\lambda_1} - \frac{I_2(y-v)}{\lambda_2}\right]\right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[\frac{I_1(y+v)}{\lambda_1} + \frac{I_2(y+v)}{\lambda_2}\right] - \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[I(\lambda_1 y + \lambda_2 v) + I(\lambda_2 y + \lambda_1 v)\right]\right\}, \\
\frac{\partial S^{VI}}{\partial v^2} &= \frac{1}{8\pi K\sqrt{\varkappa^2 - 1}} \left\{\left[-\lambda_1 I_1(y-v) + \lambda_2 I_2(y-v)\right]\right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[\lambda_1 I_1(y+v) + \lambda_2 I_2(y+v)\right] + \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[\lambda_2^2 I(\lambda_1 y + \lambda_2 v) + \lambda_1^2 I(\lambda_2 y + \lambda_1 v)\right]\right\}, \\
\frac{\partial^2 S^{VI}}{\partial u\,\partial v} &= \frac{2}{8\pi K\sqrt{\varkappa^2 - 1}} \left\{\left[-G_1(y-v) + G_2(y-v)\right]\right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[G_1(y+v) + G_2(y+v)\right] + \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[\lambda_2 G(\lambda_1 y + \lambda_2 v) + \lambda_1 G(\lambda_2 y + \lambda_1 v)\right]\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Liegt der Aufpunkt auf dem eingespannten Rand ($v = 0$) so bleibt der Singularanteil des Einflußfeldes des Stützmoments im gesamten Bereich einschließlich des Aufpunktes endlich und kann vollständig dargestellt werden. Es wird somit die entartete, modifizierte Singularität des Stützmomentes

$$\left.\frac{\partial^2 S^{VI}}{\partial v^2}\right|_{v=0} = \frac{2(\lambda_1 + \lambda_2)}{8\pi K\sqrt{\varkappa^2 - 1}}(-I_1 + I_2) = \frac{-\beta}{2\pi K\sqrt{2(\varkappa - 1)}}(I_1 - I_2)\,.$$

Für kleine Werte $\varkappa - 1$ gilt näherungsweise die Formel

$$\left.\frac{\partial^2 S^{VI}}{\partial v^2}\right|_{v=0} \sim + \beta^2 \left.\frac{\partial^2 S_\beta^{VI}}{\partial v^2}\right|_{v=0} - \frac{\beta^3 I_\beta''}{2\pi K}\left(\sqrt{\frac{\varkappa + 1}{2}} - 1\right),$$

wobei

$$\frac{\partial^2 S_\beta^{VI}}{\partial v^2} = -\frac{1}{2\pi K} I_\beta'$$

die von *Snidaric*[1] ermittelte Singularität des Stützmomentes des isotropen Halbplattenstreifens ($\beta = 1$) ist.

Zu der klassischen Singularität $\partial^2 S^{\mathrm{I}}/\partial v^2$ des Stützmomentes gelangt man, wenn man den Koordinatenursprung in der Mitte des eingespannten Randes verlegt (d. h. x durch $x - a/2$ und u durch $u - a/2$ ersetzt) und die trigonometrischen und Hyperbelfunktionen nach Potenzen von $1/a$ entwickelt. Es wird

$$\lim_{a\to\infty} I_1 = \lim_{a\to\infty} \ln \frac{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{a}\lambda_1 y \cos\frac{\pi}{a}(x+a)}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\pi}{a}\lambda_1 y - \cos\frac{\pi}{a}(x-u)} = \lim \ln \frac{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\lambda_1 y\right)^2 + \cdots + 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{a}(x+u)\right]^2 + \cdots}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\lambda_1 y\right)^2 + \cdots - 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{a}(x-u)\right]^2 - \cdots}$$

$$= \lim \ln \frac{4a^2}{\pi^2} - \ln\left[\lambda_1^2 y^2 + (x-u)^2\right].$$

Demnach folgt

$$\frac{\partial^2 S^{\mathrm{I}}}{\partial v^2} = \frac{\beta}{2\pi K\sqrt{2(\varkappa-1)}}\left\{\ln\left[\lambda_1^2 y^2 + (x-u)^2\right] - \ln\left[\lambda_2^2 y^2 + (x-u)^2\right]\right\}$$

$$= \frac{\beta}{\pi K\sqrt{2(\varkappa-1)}} \ln \sqrt{\frac{\beta^2(\varkappa+\sqrt{\varkappa^2-1})\,y^2 + (x-u)^2}{\beta^2(\varkappa-\sqrt{\varkappa^2-1})\,y^2 + (x-u)^2}}.$$

5. Halbstreifen mit freiem Querrand. Zur Vereinfachung der Berechnung wird der Einfluß der Querdrehung auf die Randschnittkräfte vernachlässigt. In diesem Falle lauten die Randbedingungen entlang der Geraden $y = 0$

$$\left(\frac{\partial^2 S^{\mathrm{VII}}}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial^3 S^{\mathrm{VII}}}{\partial y^3} + 2\varkappa\beta^2 \frac{\partial^3 S^{\mathrm{VII}}}{\partial x^2\,\partial y}\right)_{y=0} = 0\,, \tag{20}$$

wobei

$$S^{\mathrm{VII}} = S^{\mathrm{IV}} + \overline{w} \tag{21}$$

ist. Für den regulären Teil wird der Ansatz (18) gewählt.

Setzt man nun die Werte (5) und (18) in (20) ein, so bekommt man zur Bestimmung der Unbekannten A_1, A_2 die Gleichungen

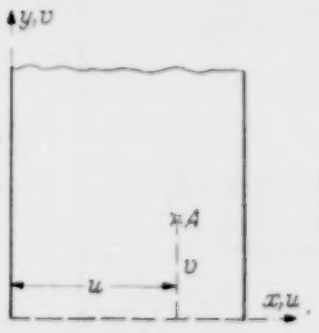


Abb. 4. Halbstreifen mit freiem Querrand.

$$-\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 - \lambda_1 e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_1 v} + \lambda_2 e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_2 v} = 0\,,$$

$$-\lambda_2^2 A_1 + \lambda_1^2 A_2 + \lambda_2^2 e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_1 v} - \lambda_1^2 e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_2 v} = 0\,.$$

Für die zweite Randbedingung wurde die Identität $2\varkappa\beta^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$ in Betracht gezogen. Durch Auflösung des linearen Systems erfolgt

$$A_1 = -\frac{\lambda_1^3 + \lambda_2^3}{\lambda_1^3 - \lambda_2^3} e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_1 v} + \frac{2\lambda_1^2\lambda_2}{\lambda_1^3 - \lambda_2^3} e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_2 v}\,,$$

$$A_2 = -\frac{2\lambda_1\lambda_2^2}{\lambda_1^3 - \lambda_2^3} e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_1 v} + \frac{\lambda_1^3 + \lambda_2^3}{\lambda_1^3 - \lambda_2^3} e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_2 v}\,.$$

Der Regularteil $\overline{w}$ wird demnach

$$\overline{w} = \frac{1}{2aK\sqrt{\varkappa^2-1}} \sum \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^3} \left\{\frac{\lambda_1^3 + \lambda_2^3}{\lambda_1^3 - \lambda_2^3}\left[\frac{1}{\lambda_1} e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_1(y+v)} + \frac{1}{\lambda_2} e^{-\frac{n\pi}{a}\lambda_2(y+v)}\right]\right.$$

$$\left. - \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^3 - \lambda_2^3}\left[e^{-\frac{n\pi}{a}(\lambda_1 y + \lambda_2 v)} + e^{-\frac{n\pi}{a}(\lambda_2 y + \lambda_1 v)}\right]\right\} \sin\frac{n\pi}{a} u \sin\frac{n\pi}{a} x\,.$$

Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in (21) und durch Differentiation nach u und v sowie unter Berücksichtigung der Identitäten (7) bekommt man folgende geschlossene Ausdrücke für die Sin-

[1] *R. Snidaric*, Dissertation T. H. Wien 1944.

gularitäten der Krümmungen und der Verwindung:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 S^{\mathrm{VII}}}{\partial u^2} &= \frac{1}{8\pi K\sqrt{\varkappa^2-1}}\left\{\left[\frac{I_1(y-v)}{\lambda_1}-\frac{I_2(y-v)}{\lambda_2}\right]\right.\\
&\left.-\frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\left[\frac{I_1(y+v)}{\lambda_1}+\frac{I_2(y+v)}{\lambda_2}\right]+\frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\left[I(\lambda_1 y+\lambda_2 v)+I(\lambda_2 y+\lambda_1 v)\right]\right\},\\
\frac{\partial^2 S^{\mathrm{VII}}}{\partial v^2} &= \frac{1}{8\pi K\sqrt{\varkappa^2-1}}\left\{\left[-\lambda_1 I_1(y-v)+\lambda_2 I_2(y-v)\right]\right.\\
&\left.+\frac{\lambda_1^2-\lambda_2^2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\left[\lambda_1 I_1(y+v)+\lambda_2 I_2(y+v)\right]-\frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\left[\lambda_2^2 I(\lambda_1 y+\lambda_2 v)+\lambda_1^2 I(\lambda_2 y+\lambda_2 v)\right]\right\},\\
\frac{\partial^2 S^{\mathrm{VII}}}{\partial u\,\partial v} &= \frac{2}{8\pi K\sqrt{\varkappa^2-1}}\left\{\left[-G_1(y-v)+G_2(y-v)\right]\right.\\
&\left.+\frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\left[G_1(y+v)+G_2(y+v)\right]-\frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\left[\lambda_2 G(\lambda_1 y+\lambda_2 v)+\lambda_1 G(\lambda_2 y+\lambda_1 v)\right]\right\}.
\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

Wenn der Aufpunkt auf dem freien Rand liegt ($v=0$), entartet die Singularität der Krümmung der x-Richtung. Es wird dann

$$\left.\frac{\partial^2 S^{\mathrm{VII}}}{\partial u^2}\right|_{v=0}=\frac{1}{8\pi K\sqrt{\varkappa^2-1}}\frac{2\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)}{\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2}\left(\frac{I_1}{\lambda_1^2}-\frac{I_2}{\lambda_2^2}\right)=\frac{1}{2\pi K\sqrt{2(\varkappa-1)}}\frac{\beta}{1+2\varkappa}\left(\frac{I_1}{\lambda_1^2}-\frac{I_2}{\lambda_2^2}\right).\tag{23}$$

Für kleine Werte von $\varkappa-1$ gilt näherungsweise die Formel

$$\left.\frac{\partial^2 S^{\mathrm{VII}}}{\partial u^2}\right|_{v=0}\cong\frac{3}{1+2\varkappa}\left.\frac{\partial^2 S_\beta^{\mathrm{VII}}}{\partial u^2}\right|_{v=0}+\frac{1}{\pi K(1+2\varkappa)}\left(\sqrt{\frac{\varkappa+1}{2}}-1\right)\left(\frac{\beta}{2}I_\beta''-2I_\beta'+\frac{3I_\beta}{\beta}\right)\tag{24a}$$

wobei

$$\frac{\partial^2 S_\beta^{\mathrm{VII}}}{\partial u^2}=\frac{1}{3\pi K}\left(\frac{I_\beta'}{2}-\frac{I_\beta}{\beta}\right)\tag{24b}$$

die von *Dworzak*[1] ermittelte Singularität ($\beta=1$), des isotropen Halbplattenstreifens ist.

Da die Singularität im Aufpunkt nicht endlich bleibt, ist der Regularteil in der Nähe dessen zu bestimmen. Wir gehen wieder von der klassischen Singularität von *Stein* für die Krümmung am freien Rande einer unendlich ausgedehnten Halbplatte aus. Diese lautet

$$\left.\frac{\partial^2 S^{\mathrm{II}}}{\partial u^2}\right|_{v=0}=\frac{1}{2\pi K\sqrt{2(\varkappa-1)}}\frac{\beta}{1+2\varkappa}\left\{-\frac{1}{\lambda_1^2}\ln\left[\lambda_1^2 y^2+(x-u)^2\right]+\frac{1}{\lambda_2^2}\ln\left[\lambda_2^2 y^2+(x-u)^2\right]\right\}$$
$$+\frac{\sqrt{2(1+\varkappa)}}{2(1+2\varkappa)\pi K}\left\{\frac{1}{\beta}\left[3+\ln\frac{a^2}{\sqrt{K_x}}+\frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2-1}}\ln\left(\varkappa+\sqrt{\varkappa^2-1}\right)\right]\right\}.\tag{25}$$

Demnach wird im Aufpunkt

$$\mathrm{Reg}\left(\frac{\partial^2 S^{\mathrm{VII}}}{\partial u^2}\right)_{v=0}=\lim_{y\to 0,\ x\to u}\left(\frac{\partial^2 S^{\mathrm{VII}}}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 S^{\mathrm{II}}}{\partial u^2}\right)_{v=0}=-\frac{1}{2\pi K(1+2\varkappa)\beta}\sqrt{\frac{\varkappa+1}{2}}\ln\frac{2}{\pi^2}\left(1-\cos\frac{2\pi u}{a}\right)$$
$$-\frac{\sqrt{2(1+\varkappa)}}{2(1+2\varkappa)\pi K}\left\{\frac{1}{\beta}\left[3+\ln\frac{a^2}{\sqrt{K_x}}+\frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2-1}}\ln\left(\varkappa+\sqrt{\varkappa^2-1}\right)\right]\right\}.\tag{26}$$

Zu dem verbliebenen Glied des rechten Teiles der Gleichung (25) gelangt man ebenfalls, wenn man in (26) den Grenzübergang für $a\to\infty$ vornimmt.

6. Schlußbemerkung. Bei der Aufstellung von geschlossenen Ausdrücken für die Singularitäten der Krümmungen und der Verwindung frei dehnbarer orthotropen Halbplattenstreifen können grundsätzlich die für die isotropen Platten geltenden Verfahren angewendet werden. Ebenfalls läßt die sich von *Pucher*[2] angegebene Lösung des isotropen eingespannten Plattenstreifens auf den orthotropen erweitern. Dieser Fall, soll in einer späteren Arbeit behandelt werden. Außerdem

[1] *W. Dworzac*, Österr. Ing.-Arch. 1 (1946), S. 66.
[2] *A. Pucher*, Federhofer-Girkmann-Festschrift, Wien 1950.

bereitet keine Schwierigkeit die Behandlung der zweiseitig gelagerten rechteckigen Platte. In diesem Falle wird zu der Singularität des Halbstreifens das reguläre Integral

$$\overline{w} = \frac{1}{2\,a\,K\sqrt{\varkappa^2-1}} \sum \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^3} \left[A_1 \operatorname{Cof} \lambda_1 \frac{n\pi}{a}\, y + A_2 \operatorname{Cof} \lambda_2 \frac{n\pi}{a}\, y \right.$$

$$\left. + B_1 \operatorname{Sin} \lambda_1 \frac{n\pi}{a}\, y + B_2 \operatorname{Sin} \lambda_2 \frac{\pi n}{a}\, y \right] \sin \frac{n\pi}{a}\, u \sin \frac{n\pi}{a}\, x$$

hinzugefügt werden. Die Konstanten A, B sind aus den Randbedingungen entlang der Querränder $y = 0$ und $y = b$ zu bestimmen.

Da die Singularitäten vom Kennwert $\varkappa$ abhängig sind, wird im allgemeinen erforderlich sein, in jedem Einzelfalle die Berechnungen von Grund auf durchzuführen. Selbstverständlich ist auch die Möglichkeit vorhanden, für ausgezeichnete Werte von $\varkappa$ eine Reihe von Einflußfeldern in Vorrat zu haben; berücksichtigt man aber die veränderliche Lage des Aufpunktes, so erscheint dies dann unpraktisch.

Jedoch ist es im Falle reeller Wurzeln λ (überdrillsteife Platte) möglich, für alle Aufpunkte einer Paralelle zur y-Achse und alle Arten von Querrändern mit einem einzigen Einflußfeld auszukommen. Allerdings muß man dann eine umständlichere Auswertung des Einflußfeldes in Kauf nehmen. Das Verfahren stützt sich auf die Tatsache, daß die Einflußfunktionen der Krümmungen lineare Ausdrücke einer Einzigen Funktion sind. Betrachten wir z. B. die Krümmung $\partial^2 S^{VI}/\partial u^2$ (19). Wir zeichnen das Einflußfeld der Funktion

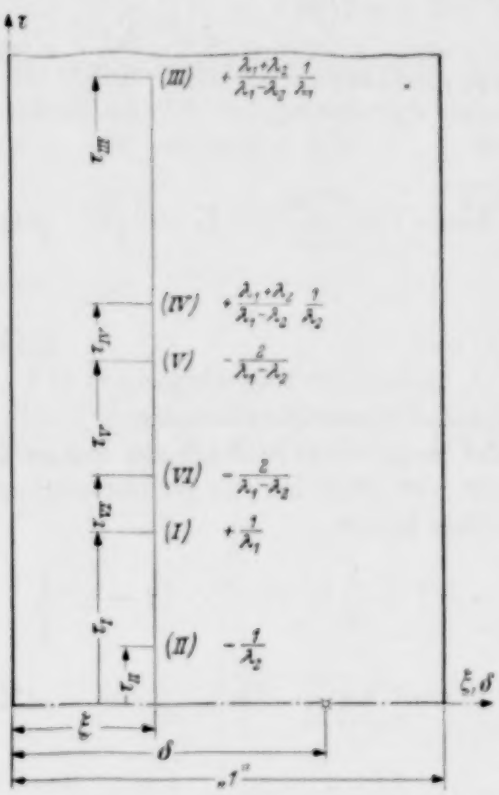


Abb. 5. Auswertung des Einflußfeldes $\partial^2 S^{VI}/\partial u^2$.

$$\Phi(\tau, \xi, \delta) = \ln \frac{\operatorname{Cof} \pi\tau - \cos \pi(\xi + \delta)}{\operatorname{Cof} \pi\tau - \cos \pi(\xi - \delta)},$$

welche der Geraden $(\delta, 0)$ zugeordnet und unabhängig vom Kennwert $\varkappa$ ist. Wir schreiben zur Abkürzung

$$\frac{x}{a} = \xi\,, \qquad \frac{u}{a} = \delta\,, \qquad \frac{y}{a} = \eta\,, \qquad \frac{v}{a} = \varepsilon\,.$$

Es wird dann

$$I_1(y - v) = I\,[\lambda_1(y - v)] = I\,[\lambda_1(\eta - \varepsilon)] = \Phi(\tau_{\mathrm{I}})$$

mit $\tau_{\mathrm{I}} = \lambda_1(\eta - \varepsilon)\,,$

$$I_1(y + v) = I\,[\lambda_1(y + v)] = I\,[\lambda_1(\eta + \varepsilon)] = \Phi(\tau_{\mathrm{III}})$$

mit $\tau_{\mathrm{III}} = \lambda_1(\eta + \varepsilon) = \tau_{\mathrm{I}} + 2\,\lambda_1\,\varepsilon\,,$

$$I(\lambda_1 y + \lambda_2 v) = I\left[\lambda_1\left(y + v + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v - v\right)\right] = \Phi(\tau_{\mathrm{V}})$$

mit $\tau_{\mathrm{V}} = \lambda_1\left(\eta + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\varepsilon\right) = \tau_{\mathrm{I}} + (\lambda_1 + \lambda_2)\,\varepsilon\,.$

Ganz ähnliche Beziehungen gelten für die Funktionen I_2. Liegt nun die Last P im Belastungspunkt (x, y), so ist der Wert der Krümmung in der x-Richtung laut (19) gleich zu

$$\frac{P}{8\pi K\sqrt{\varkappa^2-1}} \left\{ \frac{1}{\lambda_1}\Phi(\tau_{\mathrm{I}}) - \frac{1}{\lambda_2}\Phi(\tau_{\mathrm{II}}) + \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\frac{1}{\lambda_1}\Phi(\tau_{\mathrm{III}}) + \frac{1}{\lambda_2}\Phi(\tau_{\mathrm{IV}})\right] - \frac{2}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\Phi(\tau_{\mathrm{V}}) + \Phi(\tau_{\mathrm{VI}})\right] \right\}.$$

Die Auswertung des Einflußfeldes erfolgt, indem man außer dem Punkt I auch in den Punkten II bis VI mit der Last P belastet und die Einflußwerte mit den entsprechenden Koeffizienten multipliziert (Abb. 5). Für Kennwerte in der Nähe der Einheit ($\varkappa \simeq 1$) versagt das Verfahren. In diesem Falle können aber die nach den Potenzen von $\varkappa$ entwickelten Formen angewendet werden.

(Eingegangen am 19. August 1959.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. Georg Nitsiotas Lehrstuhl für Baustatik, Thessaloniki/Griechenland, Universität Aristotelion Panepistimion Thessalonikis.

Vor kurzem erschien:

BEWEISTHEORIE

Von Dr. KURT SCHÜTTE

apl. Professor der Mathematik an der Universität Marburg/Lahn

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Herausgegeben von

R. GRAMMEL, F. HIRZEBRUCH, E. HOPF, H. HOPF, W. MAAK, W. MAGNUS, F. K. SCHMIDT, K. STEIN, B. L. VAN DER WAERDEN. **Band 103**

XI, 355 Seiten Gr.-8°. 1960. DM 45,—; Ganzleinen DM 48,—

INHALTSÜBERSICHT

Einleitung · Allgemeine Grundlagen: Aussagenlogik (Aussagenlogische Funktoren. Das Formelsystem A. Semantische Schlußschemata. Allgemeingültigkeit und Unerfüllbarkeit). Formale Systeme (Allgemeine Eigenschaften formaler Systeme. Aussagenlogische Eigenschaften formaler Systeme. Das System A^* einer fundamentalen Aussagenlogik). Prädikatenlogik (Das formale System Π. Abgeleitete syntaktische Eigenschaften des Systems Π. Semantische Eigenschaften des Systems Π). Ordnungszahlen (Ordnungsrelationen für natürliche Zahlen. Wohlordnung und transfinite Induktion. Arithmetik der $-<$-Relation. Arithmetik der Ordnungszahlen · Zahlentheoretische Systeme: Engere Zahlentheorie (Das formale System Ψ. Normalherleitungen. Der Widerspruchsfreiheitsbeweis). Vollständige Zahlentheorie (Erklärung eines halbformalen Systems. Die Schnitt-Elimination im System Ω. Ψ als Untersystem von Ω. Semantische Eigenschaften eines erweiterten Systems Ω^*). Die transfinite Induktion (Induktionsherleitungen. Grenzen für die Herleitbarkeit der transfiniten Induktion · Höhere Systeme: Typenfreie Logik (Das halbformale System Λ. Abgeleitete Schlußregeln. B-Erweiterung des Systems Λ). Verzweigte Typenlogik (Das halbformale System T. Systeme der geschichteten Analysis. Die transfinite Induktion in der geschichteten Analysis). Kennzeichnungs- und Auswahloperatoren (Kennzeichnungen in der typenfreien Logik. Das Auswahlprinzip in der typenfreien Logik. Kennzeichnungen in der verzweigten Typenlogik). Analysis (Die Formalisierung der Zahlen. Grundbegriffe der Analysis. Punktmengenlehre. Die verschiedenen Möglichkeiten zur Begründung der Analysis · Literaturverzeichnis · Verzeichnis der Schlußregeln · Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Vor kurzem erschien:

Einführung in die Differentialgeometrie

Von Professor Dr. phil., Dr. math. h. c. WILHELM BLASCHKE, Hamburg, und Professor Dr. HANS REICHARDT, Berlin

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Herausgegeben von

R. GRAMMEL, F. HIRZEBRUCH, E. HOPF, H. HOPF. W. MAAK, W. MAGNUS, F. K. SCHMIDT, K. STEIN, B. L. VAN DER WAERDEN. Band 58

Zweite Auflage

Mit 57 Abbildungen. VII, 173 Seiten Gr.-8°. 1960. DM 19,80; Ganzleinen DM 24,—

INHALTSVERZEICHNIS

Vektoren, Determinanten, Matrizen: Vektorsumme. Inneres Produkt. Polarprodukte, Determinanten. Äußeres Produkt. Matrizen · Streifen und Linien: Begleitendes Dreibein. Integralinvarianten eines Streifens. Drehung eines Streifens um seine Linie. Vierscheitelsatz. Schmiegkreis, Schmiegkugel. Formänderung eines Streifens. Aufgaben, Lehrsätze. Böschungslinien auf Drehquadriken. Die isoperimetrische Haupteigenschaft des Kreises · PFAFFsche Formen: Alternierendes Produkt. Äußeres Differential. Zu einem Paar PFAFFscher Formen gehörige Ableitungen. Alternierende Differentialformen · Innere Flächenlehre: Geschichtliche Angaben. Grundgleichungen. Flächenmaß und Gesamtkrümmung. Biegungsinvarianz des Krümmungsmaßes. Die Integralformel von GAUSS und BONNET. Übertragung auf einer Fläche. Ausdehnung der Formel von GAUSS und BONNET auf eckige Bereiche. Die Formel von GAUSS und BONNET für geschlossene Flächen. Schiefwinklige Liniennetze. Aufgaben, Lehrsätze · Geodätische Linien: Geodätische als Kürzeste. Flächen festen Krümmungsmaßes. H. POINCARÉS Halbebene und die hyperbolische Geometrie. Parallellinien auf einer Fläche. Formeln von GREEN. Netze von LIOUVILLE. Verlauf der Geodätischen auf einer gewissen Fläche fester negativer Krümmung. Winkeltreue Abbildung. Aufgaben, Lehrsätze · Äußere Flächenlehre: Hauptkrümmungen. Krümmung der Flächenlinien. Der Satz von DUPIN über rechtwinklige Flächennetze. Die winkeltreuen Abbildungen des Raumes. Schmieglinien. Schmieglinien auf geradlinigen Flächen. Starrheit der Eiflächen. Formänderungen einer Fläche. Aufgaben, Lehrsätze · Minimalflächen: Minimalflächen als Schiebflächen. Ermittlung der Schmieglinien und Krümmungslinien. Adjungierte Minimalflächen. Biegung von Minimalflächen. Formeln von RIEMANN und WEIERSTRASS. Die Minimalflächen von SCHERK. Die Minimalflächen von ENNEPER. Ausblick auf PLATEAUS Aufgabe. Aufgaben, Lehrsätze · *n*-dimensionale Differentialgeometrie: Direkte Zerlegung der Differentiale. Lineare Übertragung. Flächenkurven. Erweiterung des Cartanschen Kalküls. Ableitungsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen. Die Schmiegräume. Metrische Invarianten · Anmerkungen von A. P. NORDEN · Schrifttum · Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag · Berlin/Göttingen/Heidelberg. Printed in Germany. V/12/6 1,1 K.B./Z. 040.